

Universidade do Minho
Escola de Ciências

Gerarda da Natividade Baptista da Silva Martins de
Abreu Ribeiro

Teoremas Clássicos sobre Cónicas Projetivas

Gerarda Ribeiro Teoremas Clássicos sobre Cónicas Projetivas



Universidade do Minho
Escola de Ciências

Gerarda da Natividade Baptista da Silva Martins de
Abreu Ribeiro

Teoremas Clássicos sobre Cónicas Projetivas

Tese de Mestrado
Matemática

Trabalho efetuado sob a orientação da
Doutora Lucía Fernandez
Doutora Lucile Vandembroucq

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todas as pessoas que tornaram possível a realização deste trabalho. Gostaria de expressar a minha gratidão de modo particular:

À Doutora Lucía Fernandez, orientadora deste trabalho, pelo apoio, absoluta disponibilidade, partilha de experiências e qualidade das sugestões.

À Doutora Lucile Vandembroucq, por aceitar ser co-orientadora deste trabalho, pela disponibilidade demonstrada e pela ajuda concedida em momentos oportunos.

À Lúcia Pinto, amiga e colega sempre disponível, pelo apoio constante.

A todos os meus colegas de trabalho, em particular aos colegas do grupo disciplinar de matemática, pela amizade e pela compreensão.

A toda a minha família, em particular aos meus irmãos e aos meus sogros, pelo incentivo e pela disponibilidade para me substituir, sempre que necessário.

À minha mãe, pela paciência e carinho para com os meus filhos, Pedro, António e Ângela.

Ao meu pai, ... que eu procuro nunca desapontar.

Ao meu marido, Pedro, pela enorme ajuda, pelos incentivos, por acreditar sempre e pela compreensão.

Aos meus filhos, Pedro, António e Ângela, pelos momentos de descontração e por compreenderem as minhas “ausências”.

RESUMO

Teoremas Clássicos sobre Cónicas Projetivas

As secções cónicas despertaram a curiosidade de muitos ilustres matemáticos ao longo dos tempos pela aplicação que estas curvas podem ter na resolução de várias situações reais. Neste trabalho pretendemos estudar as cónicas projetivas, isto é, estudar as cónicas aliando-as à geometria projetiva.

Na Geometria Projetiva não existe o conceito de retas paralelas pois adicionam-se, ao plano afim usual, pontos “no infinito” de modo que duas retas quaisquer se intersectem sempre num ponto. Nesta geometria não fazem então sentido conceitos “métricos” (ângulos, distâncias ...) mas há outros conceitos e propriedades que podem ser analisados, como as relações de incidência e colinearidade entre diferentes objetos. Por exemplo, estudaremos, entre outros, dois teoremas muito importantes da Geometria Projetiva, nomeadamente o “Teorema de Pappus” e o “Teorema de Desargues”.

Com a introdução de pontos no infinito, a Geometria Projetiva permite uniformizar as cónicas. Não existem tipos diferentes de cónicas, isto é, não se distinguem elipses, parábolas ou hipérboles pois com a inclusão de zero, um ou dois pontos no infinito, respetivamente, essas figuras transformam-se no mesmo tipo de figura projetiva (cónica projetiva não degenerada). Sendo assim, qualquer propriedade projetiva que se verifique para uma cónica projetiva não degenerada particular, verifica-se também para qualquer outra. Deste modo, as demonstrações de propriedades relativas a cónicas projetivas tornam-se muito mais simples porque podemos particularizar essa demonstração para uma cónica projetiva não degenerada de equação mais simples ou que passe em determinado conjunto de pontos e concluir que essa propriedade é válida para qualquer outra cónica projetiva não degenerada.

Outro aspecto muito interessante na Geometria Projetiva é o chamado “Princípio da Dualidade”, princípio este que permite que troquemos, nos enunciados das propriedades algumas palavras, tais como, reta por ponto ou concorrentes por colineares, entre outras. Deste modo, podemos obter novas propriedades a partir de outras já demonstradas sem a necessidade de as provar.

Utilizando todas as vantagens que a Geometria Projetiva nos traz, estudaremos alguns teoremas clássicos sobre cónicas projetivas, entre os quais, o famoso “Teorema de Pascal” e o seu “Hexagrama Místico”.

ABSTRACT

Classic Theorems on Projective conics

Conic sections have piqued the curiosity of illustrious mathematicians throughout history, in part because of their many applications to practical problems. In this thesis we will study projective conics, i.e. we will study conics by making use of projective geometry.

In Projective Geometry, one adds points "at infinity" to the usual affine plane so that two lines always meet. Thus the concept of parallel lines no longer makes sense. Similarly, in this geometry "metric" concepts such as angles and distances are not defined and instead one studies relations like incidence and collinearity. In relation to these, we will present two important theorems of Pappus and Desargues.

By introducing points at infinity, Projective Geometry uniformises conics. There is no longer a distinction between ellipses, parabolas and hyperbolae as, by adding an extra zero, one or two points at infinity respectively, they all become the same type of projective figure (namely, a non-degenerate projective conic). The fact that all non-degenerate projective conics are projectively equivalent simplifies their study as one can start by picking a particular representation given by a straightforward equation, or passes through a prescribed set of points.

Índice

1	Introdução	1
2	Geometria Projetiva	7
2.1	Perspectividade	7
2.2	O Plano Projetivo Real \mathbb{P}	11
2.3	Transformações Projetivas	18
2.4	O Princípio da Dualidade e os Teoremas Clássicos	28
2.5	A Razão Cruzada	39
3	Cónicas Projetivas	59
3.1	Cónicas Projetivas	59
3.2	O Teorema de Pascal	75
3.3	Tangentes e polares	85
3.4	Razão Cruzada e Cónicas Projetivas	101
	Bibliografia	115

Capítulo 1

Introdução

O estudo das secções Cónicas mereceu a dedicação de muitos ilustres matemáticos e cientistas pela sua aplicação em situações reais. De facto, as secções cónicas apareceram na geometria Grega. A sua descoberta é atribuída ao matemático grego Manaecmus, cerca de 350 a.C., que se dedicou ao estudo das cónicas pelo contributo que estas poderiam dar na resolução de três problemas clássicos: trissectar um ângulo, quadrar um círculo e duplicar um cubo.

Apolónio de Pérgamo (262 a.C. - 190 a.C.) desenvolveu o estudo sobre cónicas. Uma grande parte do trabalho de Apolónio desapareceu e o que dele conhecemos hoje, deve-se a Pappus de Alexandria (século IV d.C.) que fez uma descrição da sua grande produção. Anteriormente, a elipse, a hipérbole e a parábola eram obtidas de três tipos diferentes de cone circular reto, de acordo com o ângulo do vértice (agudo, reto ou obtuso). Apolónio mostrou, pela primeira vez, que de um único cone se podem obter a elipse, a hipérbole e a parábola variando apenas a inclinação do plano de secção e que o cone não tem obrigatoriamente que ser reto, podendo também ser oblíquo. Outra inovação de Apolónio foi o cone duplo. Antes de Apolónio, o cone utilizado era um cone simples (de uma folha). Apolónio utiliza o cone duplo, como se pode observar nas figuras 1.1, 1.2 e 1.3 (de duas folhas) e consegue, desta forma a hipérbole como uma curva de dois ramos, como a conhecemos atualmente e se ilustra na figura 1.3.

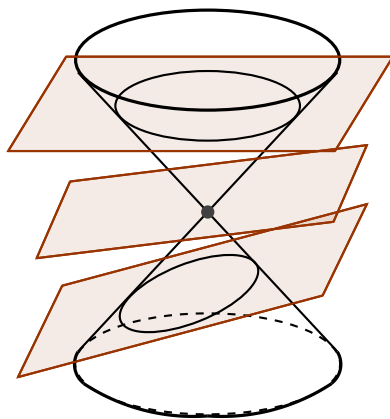


Fig. 1.1: Secção onde o plano intersecta todas as geratrizes. A curva obtida é uma elipse.

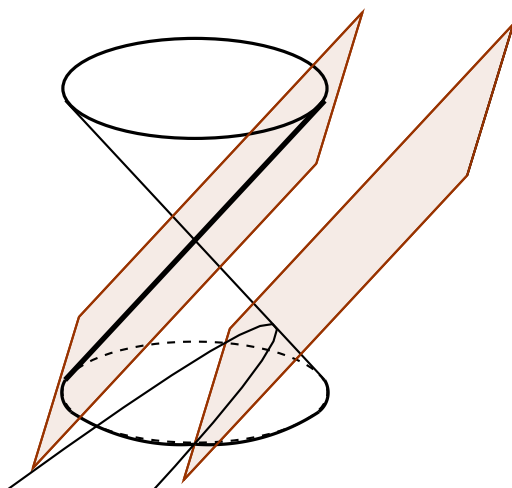


Fig. 1.2: Secção onde o plano é paralelo apenas a uma geratriz. A curva obtida é uma parábola.

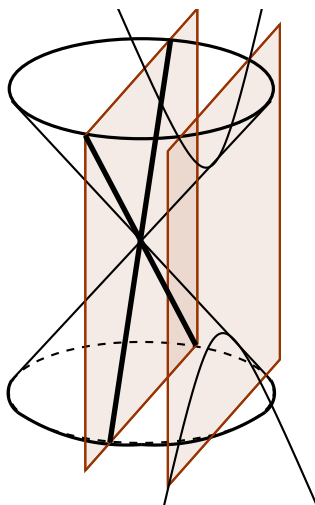


Fig. 1.3: Secção onde o plano é paralelo a duas geratrizes. A curva obtida é uma hipérbole

O grande impulso no estudo das cónicas deu-se no início do século *XVII* com o aparecimento da Geometria Analítica e da Geometria Projetiva. Pierre Fermat (1601 - 1665) e René Descartes (1596 - 1650) inventaram independentemente a Geometria Analítica. Fermat descreveu as suas ideias num trabalho não publicado, intitulado “Introdução aos lugares geométricos”. Neste trabalho introduziu a ideia de eixos perpendiculares e descobriu as equações mais simples para parábolas, elipses e hipérboles, a saber, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ que representa uma elipse, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ que representa uma hipérbole e $x^2 = 2py$ que representa uma parábola.

A Geometria Projetiva surgiu também nesta época e contribuiu para o estudo das cónicas, essencialmente para o estudo das suas propriedades não métricas, isto é, que não envolvem ângulos nem distâncias. A necessidade da criação desta geometria começou a fazer-se sentir no século *XV* pelos artistas do Renascimento que pretendiam dar aos seus quadros um aspecto naturalista, queriam que transmitissem aquilo que realmente os seus olhos viam. No século *XVII*, Girard Desargues, considerado o fundador da Geometria Projetiva, inspirando-se no “ponto de fuga” utilizado pelos pintores nas suas telas, introduziu a noção de ponto no infinito para representar o ponto de interseção entre retas paralelas, assumindo que retas paralelas e retas concorrentes são da mesma natureza e esta é a principal diferença entre a Geometria Projetiva e Geometria Euclidiana ou a Geometria Afim. Qualquer par de retas se encontra num ponto.

O segundo capítulo desta dissertação é inteiramente dedicado à Geometria Projetiva. Aí podemos encontrar a noção de perspectividade e a definição de Plano Projetivo real, bem como todos os conceitos de que faremos uso neste estudo. Na secção 2.3 faremos um estudo das transformações projetivas. As transformações projetivas não preservam a amplitude dos ângulos como é o caso das transformações euclidianas nem o paralelismo e as razões entre segmentos paralelos, como é o caso das transformações afins, no entanto, há propriedades que são preservadas por estas transformações tais como a colinearidade, a incidência e a razão cruzada, como teremos oportunidade de ver. Veremos também o “Teorema Fundamental da Geometria Projetiva” que afirma que qualquer quadrângulo projetivo pode ser transformado noutra através de uma transformação projetiva. Isto permite-nos transformar qualquer conjunto de quatro pontos num outro qualquer, de coordenadas mais simples e, a partir daí demonstrar propriedades que de outra forma seria mais complicado. Em particular, podemos transformar qualquer quadrângulo projetivo no quadrângulo de referência, formado pelos pontos projetivos $[1 : 0 : 0]$, $[0 : 1 : 0]$, $[0 : 0 : 1]$ e $[1 : 1 : 1]$.

Na secção 2.4 estudaremos o Princípio da Dualidade, princípio este que nos permite trocar algumas palavras tais como, reta por ponto ou colineares por concorrentes, entre outras e obter assim novos teoremas dualizando outros já demonstrados, não necessitando para isso de demonstração, uma vez que são válidos pelo princípio da dualidade. Nesta secção teremos também oportunidade de ver enunciados e demonstrados os teoremas de Desargues e de Pappus e os respetivos enunciados duais. Salientamos que Pappus de Alexandria (400 d.C.) é considerado o precursor da Geometria Projetiva, uma vez que, já nessa altura, muito antes do desenvolvimento desta geometria, descobriu propriedades não métricas, como é exemplo o seu famoso teorema. A última secção deste segundo capítulo será dedicada à razão cruzada, propriedade preservada pelas transformações projetivas e que nos permitirá, entre muitas outras coisas, determinar distâncias reais, utilizando, por exemplo, uma fotografia dessa realidade ou vice-versa.

A Geometria Projetiva traz-nos muitas vantagens, como já tivemos oportunidade de referir. Facilita muitas demonstrações a partir do “Princípio da Dualidade” e do “Teorema Fundamental da Geometria Projetiva”. Uma outra grande vantagem da Geometria Projetiva é o facto de nos permitir concluir que uma propriedade demonstrada nesta geometria é válida também na geometria afim ou euclidiana, uma vez que, em termos pouco formais, podemos considerar que a Geometria Projetiva abrange todas as outras.

O terceiro capítulo desta tese de mestrado é dedicado às Cónicas Projetivas. Na Geometria Afim, existe sempre uma transformação que leva uma elipse noutra elipse qualquer, tal como uma transformação afim que leva uma hipérbole noutra hipérbole ou uma parábola noutra parábola, isto é, existe sempre uma transformação afim que leva uma cónica numa outra qualquer do mesmo tipo, mas não há nenhuma transformação afim que leve, por exemplo, uma elipse numa parábola ou numa hipérbole. Na Geometria Projetiva, qualquer cónica projetiva pode ser transformada noutra. Não há distinção entre elipses, hipérboles ou parábolas, são todas do mesmo tipo, designam-se apenas Cónicas Projetivas. Todas as propriedades que sejam válidas para uma cónica projetiva são válidas para todas as outras. Deste modo, também aqui podemos particularizar e demonstrar resultados para uma cónica de equação mais simples ou que passe em determinados pontos que sejam convenientes e deduzir que a propriedade demonstrada é válida para qualquer cónica projetiva. Como exemplo disso temos o célebre “Teorema de Pascal”. Blaise Pascal (1623 - 1662) escreveu o “Tratado sobre as Cónicas” e contribuiu decisivamente para a criação da Geometria Projetiva. Pela sua importância, dedicamos a secção 3.2 do terceiro capítulo ao “Teorema de Pascal”, na qual demonstraremos este famoso teorema,

bem como alguns corolários que daí se tiram através das “ferramentas” disponibilizadas pela Geometria Projetiva, tais como o Princípio da Dualidade. Neste terceiro capítulo estudaremos também importantes teoremas sobre tangentes e polares a cónicas projetivas não degeneradas, bem como a razão cruzada de quatro pontos pertencentes a uma cónica projetiva não degenerada.

Capítulo 2

Geometria Projetiva

2.1 Perspectividade

“A primeira necessidade de um pintor é saber geometria”

Leone Battista Alberti

Uma das grandes ambições do Homem foi estudar formas de representação gráfica de objetos reais, ou seja, representar aquilo que os nossos olhos veem.

Ao longo dos tempos, os artistas foram encontrando estratégias para que as suas pinturas transmitissem a realidade. Por exemplo, objetos ou pessoas que se encontram mais longe, devem ser desenhadas mais acima e mais pequenas na tela do que aqueles que se encontram mais próximo do olhar do observador ou, para criar a impressão de profundidade, os artistas representam pares de retas paralelas por retas que se interseitam no centro da figura.

O sistema moderno de perspectiva centrada foi descoberto por volta de 1425 pelo escultor e arquiteto Brunelleschi (1377-1446), desenvolvido pelo pintor e arquiteto Leone Battista Alberti (1404-1472), e finalmente aperfeiçoado por Leonardo da Vinci (1452-1519).

Estes artistas aperceberam-se que conseguiriam uma representação realista a duas dimensões de um objeto tridimensional se unissem através de uma reta cada ponto do espaço tridimensional com um centro de projeção (olho) e intersetando a dita reta com um plano (tela), como se exemplifica na figura 2.1. A este tipo de aplicação, chamamos projeção cónica.

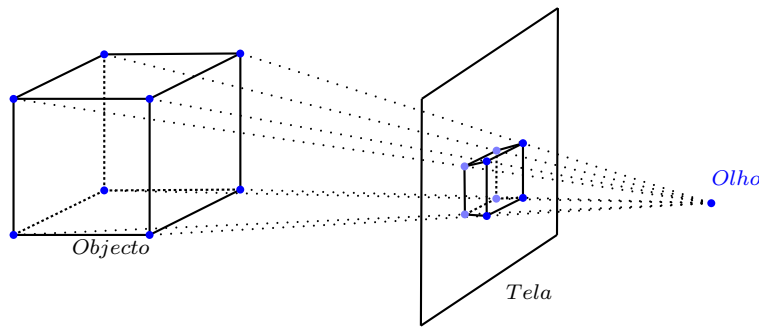


Fig. 2.1: Exemplo de projeção cônica.

Evidentemente, a figura projetada na tela depende das distâncias a que se encontram o olho e o objeto da tela e também do ângulo de visão. No entanto, como veremos mais tarde, algumas propriedades são preservadas, independentemente destas distâncias e desse ângulo de visão.

Matematicamente, no nosso estudo, usaremos a origem do referencial em \mathbb{R}^3 para representar o olho e uma família de retas em \mathbb{R}^3 que passam pela origem para representar os raios de luz. A tela é representada por um plano que não passa na origem.

Sejam α e α' dois planos que não passam por O . Dizemos que um ponto P em α e um ponto Q em α' estão em perspectiva por O se existe uma reta que passa em O , P e Q .

A correspondência que associa P ao ponto Q e reciprocamente diz-se uma perspectividade de centro O .

Observe-se que a perspectividade não está definida em todos os pontos de α e α' .

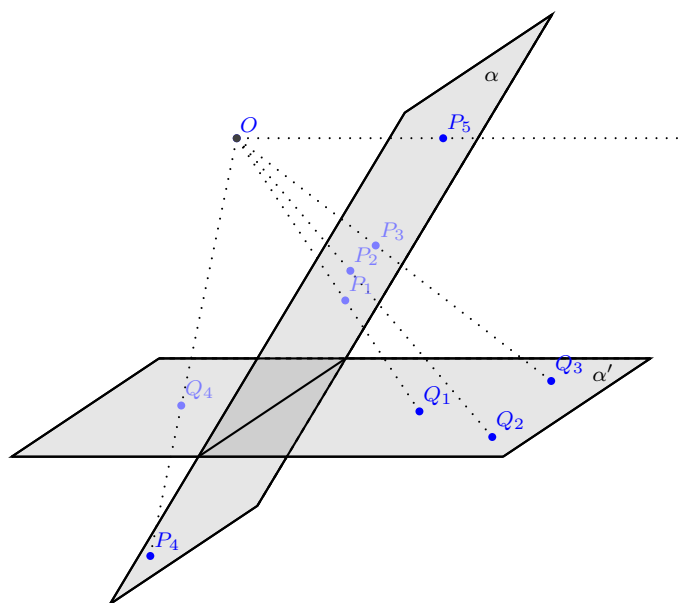


Fig. 2.2: Pontos em perspectiva.

O problema surge em pontos como P_5 , como se observa na figura 2.2, em que OP_5 é paralela ao plano α' . O astrónomo Joahannes Kepler (1571-1630) introduziu o termo de ponto no infinito para designar o ponto de concorrência de um feixe de retas paralelas.

Consideremos agora um polígono. A sua imagem sob uma perspectiva por O será um polígono com o mesmo número de lados. A sua forma pode sofrer alterações mas pontos colineares continuam a ser colineares como se ilustra na figura 2.3.

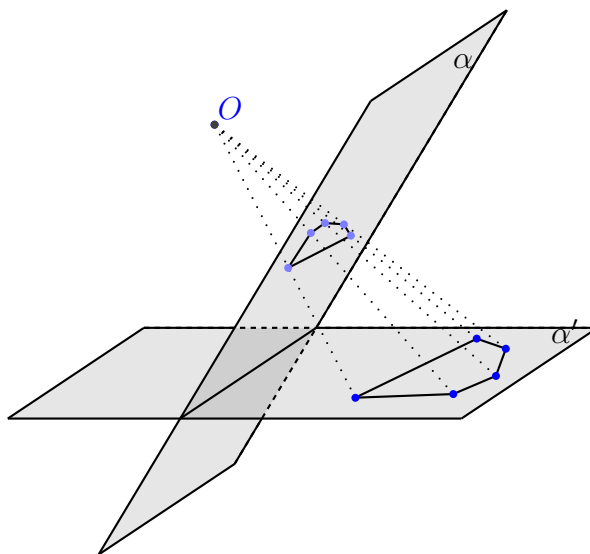


Fig. 2.3: Polígono em perspectiva.

Se considerarmos uma circunferência, a sua imagem não será sempre uma outra circunferência, como podemos ver nas figuras seguintes.

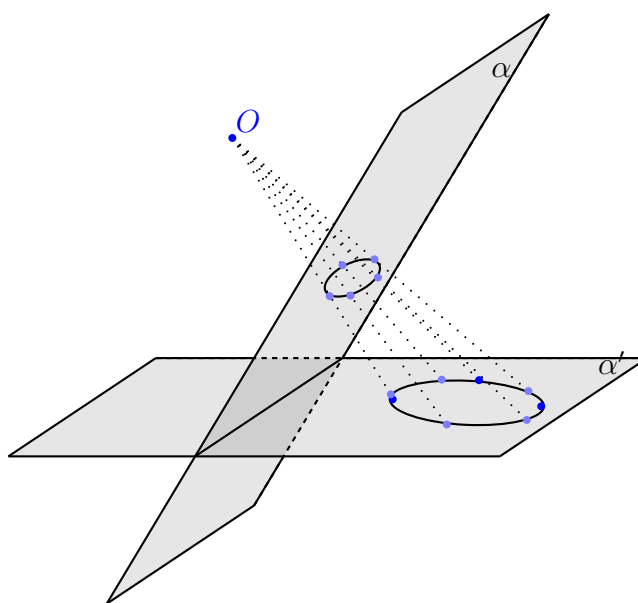


Fig. 2.4: Circunferência em perspectiva (elipse).

Nesta figura 2.4, podemos observar que a imagem da circunferência é uma elipse. Não tem pontos no infinito, porque todos os pontos da circunferência em α estão em perspectiva por O com um ponto em α' .

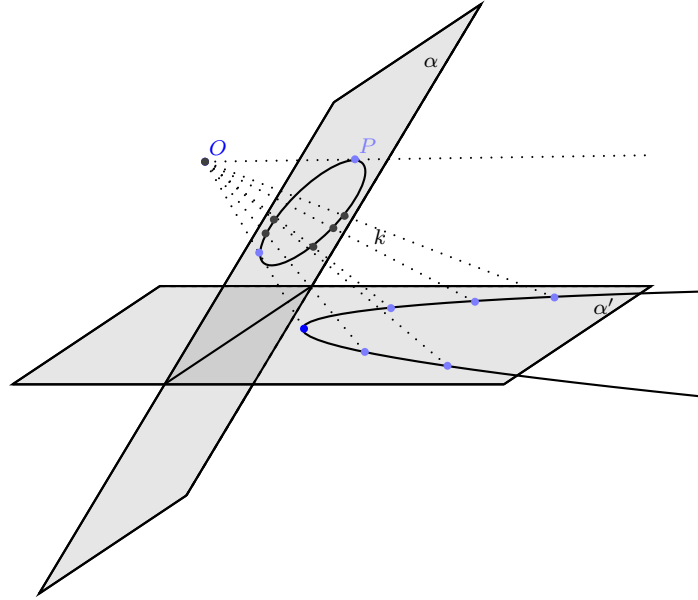


Fig. 2.5: Circunferência em perspectiva (parábola).

Aqui (figura 2.5), a imagem da circunferência é uma parábola. Como se pode observar, tem um único ponto no infinito. OP é paralela ao plano α' , ou seja, o ponto P da circunferência em α não está em perspectiva por O com nenhum ponto de α' . Dizemos então que esse ponto, de interseção de OP com o plano α' está no infinito.

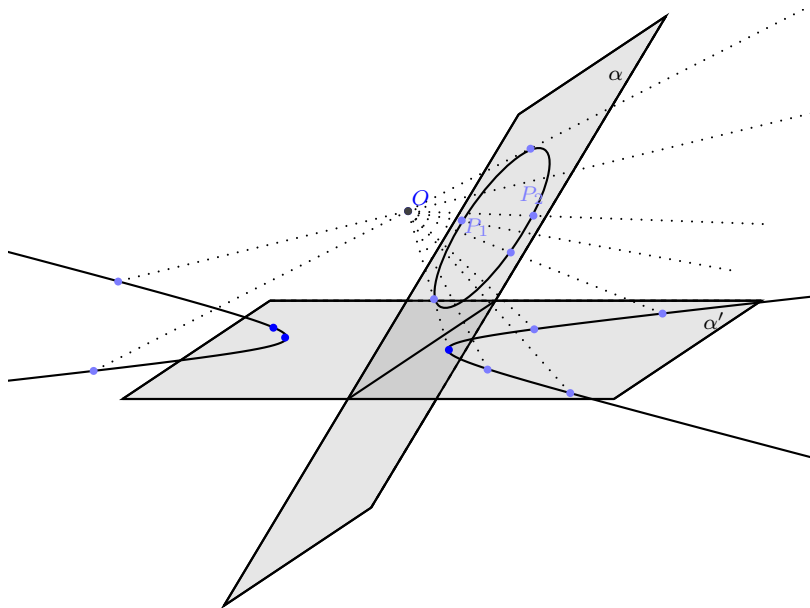


Fig. 2.6: Circunferência em perspectiva (hipérbole)

Nesta figura 2.6, a imagem da circunferência é uma hipérbole. Tem dois pontos no infinito. OP_1 e OP_2 são paralelas ao plano α' .

Como já vimos, a colinearidade é preservada pela perspectividade. Contudo, a perspectividade não preserva o paralelismo, como podemos ver na figura seguinte.

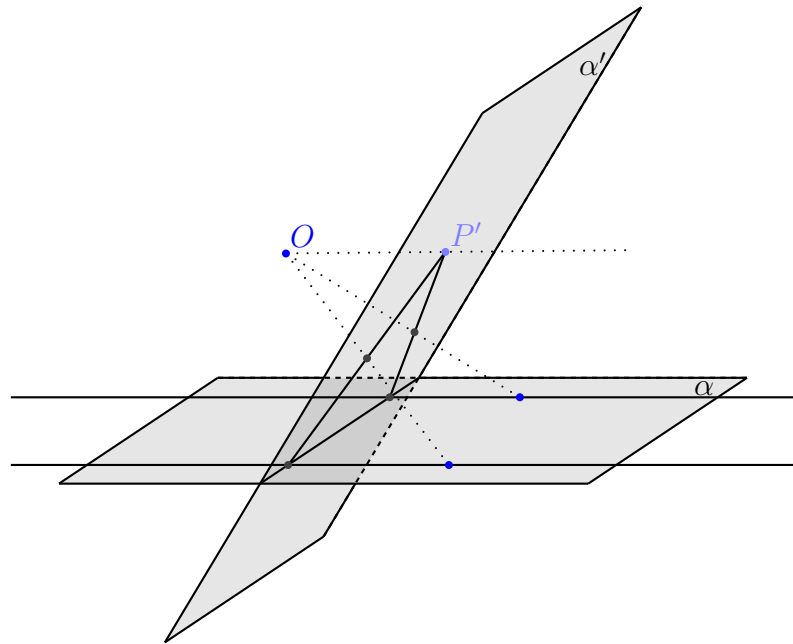


Fig. 2.7: Retas paralelas em perspectiva.

As retas continuam a ser retas, mas deixam de ser paralelas para se encontrarem num ponto que não tem imagem no plano α uma vez que OP' é paralela ao plano α .

Este facto matemático explica a razão pela qual os artistas representam usualmente retas paralelas por retas que se intersectam num ponto.

2.2 O Plano Projetivo Real \mathbb{P}

O princípio fundamental da geometria projetiva é que duas retas paralelas se “cortam no infinito”, isto é, um espaço projetivo consiste num espaço afim ao qual acrescentamos um conjunto de pontos ideais (pontos no infinito) de forma que cada par de retas paralelas se cortem num desses pontos.

Passemos agora a algumas definições formais e verifiquemos depois que estas correspondem efectivamente ao que foi afirmado no parágrafo anterior.

Definição 2.2.1 *Seja E o espaço vetorial \mathbb{R}^3 .*

- Chama-se **plano projetivo real** \mathbb{P} ao conjunto de retas vetoriais de E .
- A cada reta vetorial chama-se **ponto projetivo**. Se v é um vector gerador de uma reta vetorial, o ponto projetivo referente a essa reta designa-se por $[v]$.

Uma reta vetorial está definida por um vector (a, b, c) com a, b e c não todos nulos e únicos a menos de um fator de proporcionalidade. Estes escalares são chamados **coordenadas homogêneas** do ponto projetivo e escrevemos $[a : b : c]$.

- Chama-se **reta projetiva** no plano projetivo ao conjunto de retas vetoriais contidas num plano vetorial.

Seja l uma reta projetiva do plano \mathbb{P} definida por um plano vetorial de equação $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$. Os escalares α, β e γ são únicos a menos de um fator de proporcionalidade. São chamados **coordenadas de Plucker** da reta e escrevemos $[\alpha : \beta : \gamma]$

- Diz-se que um ponto do plano projetivo **incide** numa reta projetiva ou que a reta **incide** num ponto se e só se o ponto pertence à reta.
- Chama-se **triângulo projetivo** a qualquer conjunto de três pontos não colineares.
- Designa-se por **quadrângulo projetivo** ou **quadrilátero não degenerado** a todo o conjunto de quatro pontos projetivos dos quais não existem três colineares.
- Os pontos projetivos $[1 : 0 : 0], [0 : 1 : 0], [0 : 0 : 1]$ são denominados **triângulo de referência** e o ponto $[1 : 1 : 1]$ **unitário**. O conjunto formado por estes quatro pontos designa-se por **quadrângulo de referência**.

Note-se que, se $A \equiv [x : y : z]$ é um ponto do plano projetivo e $l \equiv [\alpha : \beta : \gamma]$ são as coordenadas de Plucker de uma reta projetiva então $A \in l \Leftrightarrow \alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

A notação $[: :]$ usa-se para indicar que coordenadas homogêneas de pontos projetivos ou coordenadas de Plucker de uma reta projetiva são únicas a menos de um fator de proporcionalidade. Por exemplo, as coordenadas de Plucker $[2 : 3 : -1]$ e $[-4 : -6 : 2]$ representam a mesma reta projetiva que corresponde ao plano representado pela equação $2x + 3y - z = 0$.

Encontrar a equação de uma reta projetiva em \mathbb{P} que passa nos pontos projetivos $[a : b : c]$ e $[a' : b' : c']$ é o mesmo que determinar, em \mathbb{R}^3 , a equação do plano gerado pelos vectores (a, b, c) e (a', b', c')

Exemplos:

1. Determinemos a equação da reta projetiva que incide nos pontos $[2 : 1 : 3]$ e $[-3 : 2 : 1]$:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -5x - 11y + 7z = 0$$

2. A mesma técnica pode ser utilizada para verificar se três pontos são ou não colineares, ou seja, se incidem na mesma reta.

Os pontos $[1 : 2 : -1]$, $[3 : 1 : 5]$ e $[0 : 0 : 1]$ não são colineares dado que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$$

e os pontos $[2 : 1 : 3]$, $[1 : 2 : 1]$ e $[-1 : 4 : -3]$ são colineares, uma vez que:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

Envio de uma reta projetiva ao infinito.

Num plano projetivo “vivem” muitos planos afins. Para cada reta projetiva \mathbf{r} , $\mathbb{P} - \mathbf{r}$ é um plano afim. A reta \mathbf{r} costuma chamar-se reta do infinito do plano afim.

Esta construção é muito importante porque permite demonstrar resultados projetivos passando-os a afins e reciprocamente obter resultados afins passando-os a projetivos.

Proposição 2.2.2 *Dada uma reta projetiva \mathbf{r} no plano projetivo \mathbb{P} , tem-se que $\mathbb{P} - \mathbf{r}$ é um plano afim. A reta \mathbf{r} diz-se reta do infinito do plano afim e os pontos de \mathbf{r} dizem-se pontos no infinito ou pontos ideais do plano afim.*

Demonstração:

Seja \mathbf{r} uma reta projetiva definida por um plano vetorial dado pela equação cartesiana

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$$

Consideremos o plano afim π de \mathbb{R}^3 definido por uma equação do tipo

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = k$$

com $k \neq 0$, isto é, um plano afim paralelo e distinto do plano vetorial que define \mathbf{r} .

Toda a reta vetorial de \mathbb{R}^3 não contida no plano vetorial intersesta o plano afim anterior num e num só ponto e reciprocamente, todo ponto do plano afim define uma e uma só reta vetorial que não está contida no plano vetorial inicial. Por outras palavras, todo o ponto do espaço projetivo que não pertence à reta projetiva \mathbf{r} corresponde a um e um só ponto do plano afim π .

■

Exemplo:

Consideremos P , o plano afim de \mathbb{R}^3 de equação $z = 1$.

As retas vetoriais que não estão contidas no plano vetorial horizontal, $z = 0$, intersestam P num único ponto.

Recorde-se que, as coordenadas homogêneas de um ponto não são únicas. Por exemplo, $[2 : 1 : 3]$, $[4 : 2 : 6]$, $[-2 : -1 : -3]$ e $[\frac{2}{3} : \frac{1}{3} : 1]$ representam o mesmo ponto projetivo. Estas últimas coordenadas representam o ponto onde a reta vetorial $\langle(2, 1, 3)\rangle$ incide no plano afim P .

Em geral, podemos então dizer: Seja $A \equiv [v_1 : v_2 : v_3]$ um ponto deste plano projetivo, tal que $v_3 \neq 0$. A reta vetorial $\langle(v_1, v_2, v_3)\rangle$ incide no plano afim P no ponto $(\frac{v_1}{v_3}, \frac{v_2}{v_3}, 1)$.

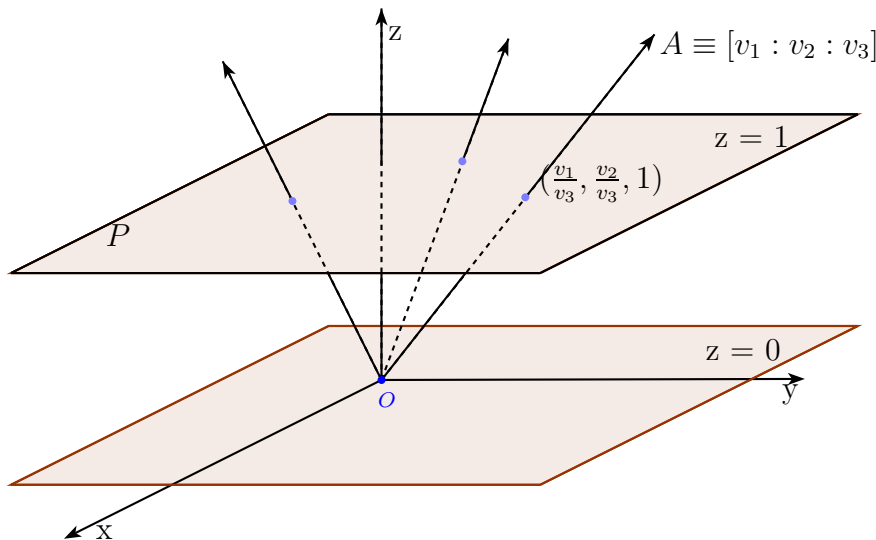


Fig. 2.8: Representação de pontos projetivos no plano afim $z = 1$.

Repare-se que as retas vetoriais contidas no plano $z = 0$ não intersectam o plano afim $z = 1$. Têm as mesmas direções que as retas afins contidas em $z = 1$.

Por exemplo, os pontos projetivos definidos por $B \equiv [1 : 0 : 0]$ e $C \equiv [1 : 1 : 0]$ não correspondem a nenhum ponto do plano afim P . Estes pontos projetivos representados por estas retas vetoriais são pontos no infinito ou pontos ideais para $z = 1$.

Uma figura projetiva é um subconjunto de \mathbb{P} , isto é, são conjuntos de retas que passam pela origem em \mathbb{R}^3 , como se pode observar nas figuras seguintes.

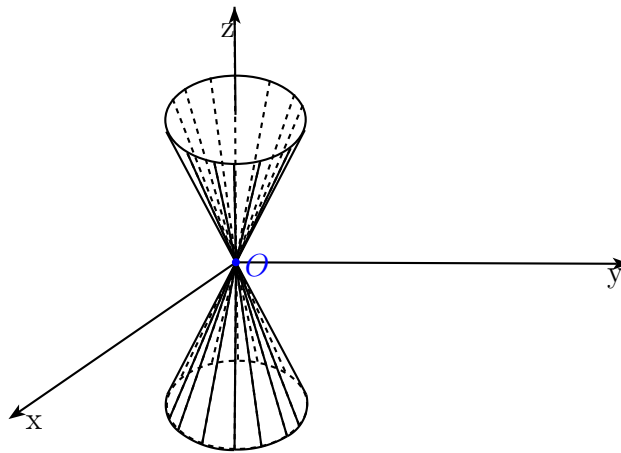


Fig. 2.9: Figura projetiva.

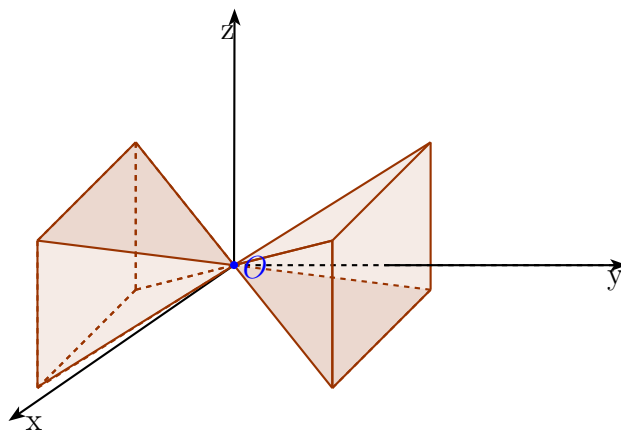


Fig. 2.10: Figura projetiva.

Definição 2.2.3 Chama-se **traço afim** de uma figura projetiva à sua representação num plano afim, quando enviamos uma reta ao infinito.

O traço afim de uma figura projetiva depende, obviamente do plano afim escolhido.

Exemplos:

1. O traço afim de uma reta projetiva é sempre uma reta afim porque a interseção do plano vetorial que define a reta projetiva com o plano afim fixo é uma reta, a menos que estes dois planos sejam paralelos e nesse caso, o traço afim da reta é o conjunto vazio.

Consideremos, no plano projetivo real \mathbb{P} , por exemplo, a reta projetiva l associada ao plano vetorial

$$\{(0, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$$

Novamente, no plano afim $z = 1$, estas retas intersectam o plano nos pontos da forma $(0, \frac{y_0}{z_0}, 1)$.

Todos estes pontos incidem na mesma reta afim l de P .

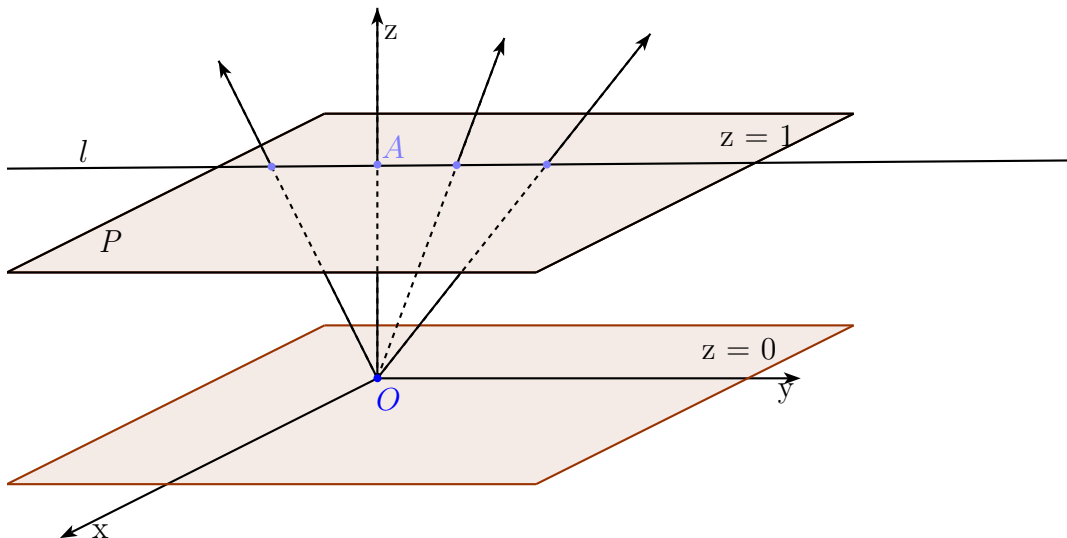


Fig. 2.11: Traço afim de uma reta projetiva $l = \{(0, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$

2. O traço afim de um cone depende do plano afim escolhido, mas será sempre uma cônica.

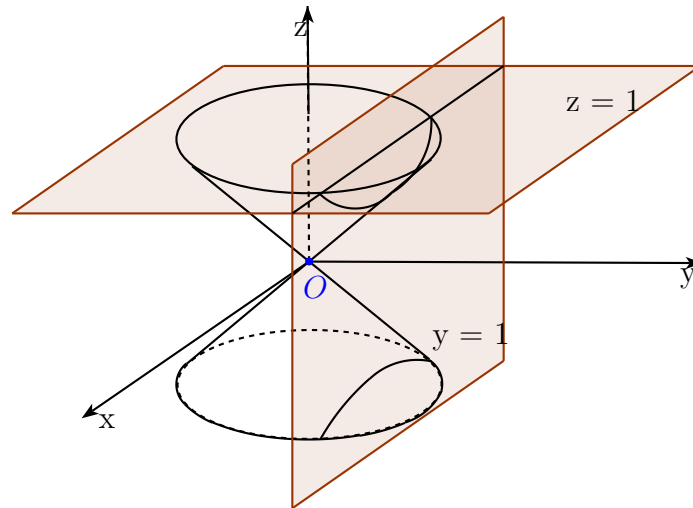


Fig. 2.12: Traço afim de um cone.

O mesmo cone é projetado numa circunferência em $z = 1$ e numa hipérbole em $y = 1$.

3. O traço afim de duas retas projetivas também não é sempre o mesmo.

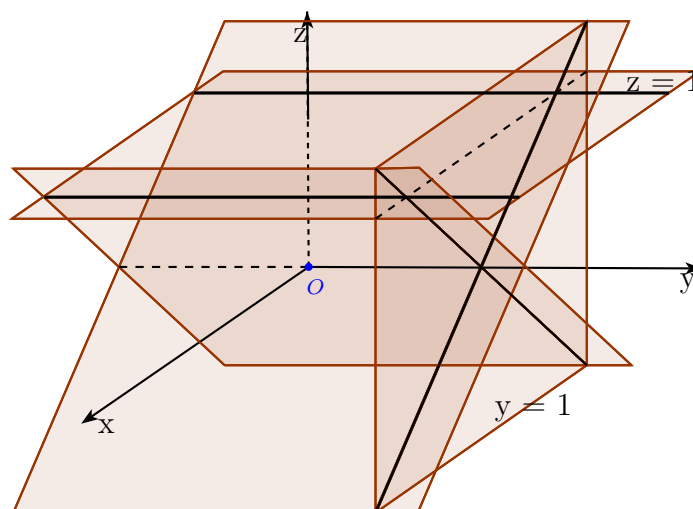


Fig. 2.13: Traço afim de duas retas projetivas.

Nesta figura, os dois planos vetoriais secantes que definem as retas projetivas são projetados em duas retas paralelas no plano $z = 1$ e em duas retas concorrentes no plano $y = 1$

2.3 Transformações Projetivas

Recorde-se que a multiplicação de um vector por uma matriz é linear e portanto $A(\lambda \vec{v}) = \lambda A\vec{v}$. Assim, se $[v] = [w]$ ou seja, se $\vec{w} = \lambda \vec{v}$ então $A\vec{w} = A\lambda \vec{v} = \lambda A\vec{v}$ e portanto $[A\vec{w}] = [A\vec{v}]$.

Definição 2.3.1 Uma **transformação projetiva** de \mathbb{P} é uma aplicação $t : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ da forma $t : [\vec{x}] \mapsto [A\vec{x}]$ onde A é uma matriz 3×3 invertível. Dizemos que A é a matriz associada a t .

O conjunto de todas as transformações projetivas é denotado por $PGL(2)$.

Note-se que, se A é a matriz associada a uma transformação projetiva, λA é uma matriz associada à mesma transformação projetiva.

Teorema 2.3.2 O conjunto das transformações projetivas $PGL(2)$ constitui um grupo sob a composta de funções

Demonstração:

1. Verifiquemos que a composta de duas transformações projetivas é uma operação fechada.

Sejam t_1 e t_2 duas transformações projetivas tais que:

$$t_1 : [\vec{x}] \mapsto [A_1\vec{x}] \text{ e } t_2 : [\vec{x}] \mapsto [A_2\vec{x}]$$

em que A_1 e A_2 são matrizes 3×3 invertíveis.

Então,

$$t_1 \circ t_2([\vec{x}]) = t_1(t_2([\vec{x}])) = t_1([A_2\vec{x}]) = [(A_1A_2)\vec{x}]$$

Como A_1 e A_2 são invertíveis, A_1A_2 é também invertível.

Então $t_1 \circ t_2$ é uma transformação projetiva.

2. A composta de transformações projetivas é associativa, uma vez que a composta de aplicações é sempre associativa.
3. Vejamos agora que existe elemento neutro.

Seja $i : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ a transformação definida por $i : [\vec{x}] \mapsto [I\vec{x}]$ em que I é a matriz identidade 3×3 .

Observe-se que i é a identidade do plano projetivo.

Uma vez que I é uma matriz invertível, i é uma transformação projetiva e a identidade é o elemento neutro do produto de matrizes.

4. Observemos que existe elemento inverso para qualquer transformação projetiva.

Seja $t : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ uma transformação projetiva definida por $t : [\vec{x}] \mapsto [A\vec{x}]$ em que A é uma matriz invertível 3×3 .

Então podemos definir outra transformação projetiva

$$t' : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P} \text{ por } t' : [\vec{x}] \mapsto [A^{-1}\vec{x}]$$

.

Para qualquer $[\vec{x}] \in \mathbb{P}$, temos que

$$t \circ t'([\vec{x}]) = t([A^{-1}\vec{x}]) = [A(A^{-1}\vec{x})] = [\vec{x}]$$

e

$$t' \circ t([\vec{x}]) = t'([A\vec{x}]) = [A^{-1}(A\vec{x})] = [\vec{x}]$$

Então, t' é uma transformação projetiva inversa de t .

Concluindo, o conjunto das transformações projetivas $PGL(2)$ é um grupo.

■

A demonstração do teorema anterior permite-nos dizer que, se t_1 e t_2 são transformações projetivas com matrizes associadas A_1 e A_2 , respetivamente, então $t_1 \circ t_2$ é

uma transformação projetiva de matriz associada $A_1 A_2$ e também que, se A é a matriz associada à transformação projetiva t , então t^{-1} é uma transformação projetiva com matriz associada A^{-1} .

Como

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{\det(A)}$$

e a matriz de uma transformação projetiva é única a menos do produto por um escalar, então $\text{adj}(A)$ é também uma matriz associada à transformação projetiva t^{-1} .

Definição 2.3.3 *Duas figuras do plano projetivo dizem-se **projetivo - congruentes** se existir uma transformação projetiva que leva uma na outra. Uma propriedade diz-se projetiva se é preservada por uma transformação projetiva.*

De seguida estudaremos duas dessas propriedades, nomeadamente a **colinearidade** e a **incidência**.

Proposição 2.3.4

1. *As transformações projetivas preservam a incidência.*
2. *As transformações projetivas preservam a colinearidade.*

Demonstração:

1. É óbvio que as transformações projetivas preservam a incidência, uma vez que, toda a aplicação entre conjuntos preserva a inclusão.
2. Verifiquemos que a colinearidade é uma propriedade projetiva.

Relembre-se que uma reta em \mathbb{P} é um plano vetorial em \mathbb{R}^3 e que a multiplicação de matrizes invertíveis é uma aplicação linear bijetiva, ou seja, transforma um plano vetorial noutro plano vetorial.

Podemos então concluir que uma transformação projetiva transforma uma reta projetiva noutra reta projetiva.

■

Observe-se que uma reta em \mathbb{P} é um plano em \mathbb{R}^3 que passa pela origem e, deste modo, a sua equação é da forma $ax + by + cz = 0$ que, na forma matricial escrevemos $\mathbf{l}x = 0$ em que $\mathbf{l} = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$.

Seja t uma transformação projetiva definida por $t : [\vec{x}] \mapsto [A\vec{x}]$, onde A é uma matriz invertível 3×3 .

Seja $X = [\vec{x}]$ um ponto qualquer da reta $\mathbf{l}x = 0$. A imagem $[X'] = [\vec{x}'] = [A\vec{x}]$ de um ponto qualquer X é $X' = AX$, ou seja, $X = A^{-1}X'$.

Desta forma, $\mathbf{l}X = 0 \Leftrightarrow \mathbf{l}(A^{-1}X') = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{l}A^{-1})X' = 0$.

Exemplo:

Consideremos a reta $2x - y + z = 0$, de coordenadas de Plucker $[2 : -1 : 1]$.

O ponto $[-1 : -1 : 1]$ pertence a esta reta, dado que

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Consideremos a transformação projetiva t de matriz associada A , tal que

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

A imagem do ponto $[-1 : -1 : 1]$ sob esta transformação é:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

ou seja, é o ponto $[-1 : 3 : 6]$.

Determinemos a imagem desta reta sob a transformação projetiva t .

Necessitamos então da matriz associada a t^{-1} .

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} -2 & -8 & 4 \\ -2 & -4 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

A imagem da reta será então,

$$(\mathbf{l} \cdot Adj(A))X = 0$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -8 & 4 \\ -2 & -4 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & -15 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= 0 \Leftrightarrow -3x - 15y + 7z = 0 \end{aligned}$$

Observe-se que o ponto $[-1 : 3 : 6]$ pertence a esta reta, dado que,

$$\begin{pmatrix} -3 & -15 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 0$$

Na geometria afim, dados dois conjuntos de três pontos não colineares, existe uma única transformação afim que leva os pontos de um conjunto nos pontos do outro conjunto, isto é, uma transformação afim é unicamente determinada pelo seu efeito num triângulo.

Veremos se o mesmo se passa na geometria projetiva.

Exemplo:

Consideremos as transformações projetivas t_1 e t_2 de matrizes associadas A_1 e A_2 , respetivamente:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 12 & 6 & -18 \\ 9 & 3 & -9 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

e verifiquemos que as duas transformam o triângulo $[1 : 0 : 1]$, $[-1 : 2 : 0]$ e $[0 : 3 : 1]$ no mesmo triângulo (triângulo de referência):

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

isto é, os pontos $[1 : 0 : 1]$, $[-1 : 2 : 0]$ e $[0 : 3 : 1]$ são transformados por t_1 em $[-1 : 0 : 0]$, $[0 : -1 : 0]$ e $[0 : 0 : -1]$ respetivamente, ou seja, nos pontos $[1 : 0 : 0]$, $[0 : 1 : 0]$ e $[0 : 0 : 1]$ respetivamente.

$$\begin{pmatrix} 12 & 6 & -18 \\ 9 & 3 & -9 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 12 & 6 & -18 \\ 9 & 3 & -9 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 12 & 6 & -18 \\ 9 & 3 & -9 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

ou seja, t_2 leva os pontos $[1 : 0 : 1]$, $[-1 : 2 : 0]$ e $[0 : 3 : 1]$ em $[-6 : 0 : 0]$, $[0 : -3 : 0]$ e $[0 : 0 : -2]$, isto é, em $[1 : 0 : 0]$, $[0 : 1 : 0]$ e $[0 : 0 : 1]$ respetivamente.

Como acabamos de ver, t_1 e t_2 têm o mesmo efeito neste conjunto de três pontos. No entanto, não representam a mesma transformação projetiva, uma vez que o seu efeito em outros pontos não é o mesmo.

Por exemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 12 & 6 & -18 \\ 9 & 3 & -9 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 \\ 27 \\ -14 \end{pmatrix}$$

e $[7 : 9 : -7] \neq [42 : 27 : -14]$

Concluimos então que uma transformação projetiva não é unicamente determinada pelo seu efeito num conjunto de três pontos. Na verdade, são necessários quatro pontos, como refere o **Teorema Fundamental da Geometria Projetiva**:

Teorema 2.3.5 Teorema Fundamental da Geometria Projetiva.

Sejam $ABCD$ e $A'B'C'D'$ dois quadrângulos em \mathbb{P} . Então existe uma e uma só transformação projetiva t que leva A em A' , B em B' , C em C' e D em D' . A transformação projetiva com essa propriedade é única.

Demonstração:

Sejam $A \equiv [a_1 : a_2 : a_3]$, $B \equiv [b_1 : b_2 : b_3]$, $C \equiv [c_1 : c_2 : c_3]$, $D \equiv [d_1 : d_2 : d_3]$, $A' \equiv [a'_1 : a'_2 : a'_3]$, $B' \equiv [b'_1 : b'_2 : b'_3]$, $C' \equiv [c'_1 : c'_2 : c'_3]$ e $D' \equiv [d'_1 : d'_2 : d'_3]$ oito pontos projetivos, formando dois quadrângulos $ABCD$ e $A'B'C'D'$ em \mathbb{P} .

Vejamos se existe uma transformação projetiva t_1 que leve o quadrângulo de referência nos pontos A, B, C e D.

Seja $A_1 = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$ a matriz associada a t_1 .

Então,

$$\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Do mesmo modo,

$$\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

E também,

$$\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Ou seja, a matriz $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ leva o triângulo de referência em A, B e C.

Esta matriz A_1 é invertível porque A, B e C não são colineares e portanto $[a]$, $[b]$ e $[c]$ são linearmente independentes.

Como as coordenadas de um ponto são únicas a menos de multiplicação por um escalar diferente de zero, temos que, qualquer matriz da forma $\begin{pmatrix} \alpha a_1 & \beta b_1 & \gamma c_1 \\ \alpha a_2 & \beta b_2 & \gamma c_2 \\ \alpha a_3 & \beta b_3 & \gamma c_3 \end{pmatrix}$ transforma o triângulo de referência nos pontos A, B e C.

Mas, pretendemos que a mesma matriz transforme o ponto unitário em D.

$$\begin{pmatrix} \alpha a_1 & \beta b_1 & \gamma c_1 \\ \alpha a_2 & \beta b_2 & \gamma c_2 \\ \alpha a_3 & \beta b_3 & \gamma c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}, \text{ com } \alpha, \beta, \gamma \text{ não nulos.}$$

ou seja,

$$\begin{cases} \alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1 = d_1 \\ \alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2 = d_2 \\ \alpha a_3 + \beta b_3 + \gamma c_3 = d_3 \end{cases}$$

que é um sistema possível e determinado de variáveis α , β e γ dado que $\det(A_1) \neq 0$.

Tem-se ainda, pela regra de Cramer, que:

$$\alpha = \frac{\det \begin{pmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}}{\det(A_1)}, \beta = \frac{\det \begin{pmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{pmatrix}}{\det(A_1)} \text{ e } \gamma = \frac{\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{pmatrix}}{\det(A_1)}$$

Como A , B , C e D formam um quadrângulo projetivo, todos estes valores são efectivamente não nulos.

Assim,

$$\det \begin{pmatrix} \alpha a_1 & \beta b_1 & \gamma c_1 \\ \alpha a_2 & \beta b_2 & \gamma c_2 \\ \alpha a_3 & \beta b_3 & \gamma c_3 \end{pmatrix} = \alpha \beta \gamma \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \alpha \beta \gamma \det(A_1) \neq 0$$

Sendo assim, existe sempre uma transformação projetiva t_1 que leva os pontos do quadrângulo de referência $[1 : 0 : 0]$, $[0 : 1 : 0]$, $[0 : 0 : 1]$ e $[1 : 1 : 1]$ em quatros pontos A , B , C e D respetivamente.

Do mesmo modo, existe uma transformação projetiva t_2 que leva os pontos do quadrângulo de referência em A' , B' , C' e D' respetivamente.

Assim, a transformação projetiva $t = t_2 \circ t_1^{-1}$ leva os pontos A , B , C e D nos pontos A' , B' , C' e D' respetivamente, como podemos observar:

- $(t_2 \circ t_1^{-1})(A) = t_2(t_1^{-1}(A)) = t_2([1 : 0 : 0]) = A'$
- $(t_2 \circ t_1^{-1})(B) = t_2(t_1^{-1}(B)) = t_2([0 : 1 : 0]) = B'$
- $(t_2 \circ t_1^{-1})(C) = t_2(t_1^{-1}(C)) = t_2([0 : 0 : 1]) = C'$
- $(t_2 \circ t_1^{-1})(D) = t_2(t_1^{-1}(D)) = t_2([1 : 1 : 1]) = D'$

Para provar que a transformação é única, comecemos por provar que a uma transformação projetiva que fixa o quadrângulo de referência é a identidade.

Seja t uma transformação projetiva definida por uma matriz A que fixa os pontos do quadrilátero de referência assim

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ d \\ d \end{pmatrix}$$

com a, b, c, d não nulos.

Como

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ao multiplicar pela matriz A obtemos

$$\begin{pmatrix} d \\ d \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$$

e então $a = b = c = d$. A matriz $\frac{1}{d}A$, que também representa t , é portanto a matriz identidade e assim $t = Id$.

Provemos agora que a transformação projetiva que leva $ABCD$ em $A'B'C'D'$ é única.

Suponhamos, por redução ao absurdo, que existem duas transformações projetivas t e t' que levam os pontos A, B, C e D nos pontos A', B', C' e D' respectivamente.

Recorde-se que existe uma transformação projetiva t_1 que leva o quadrângulo de referência nos pontos A, B, C e D e uma outra t_2 que leva o quadrângulo de referência nos pontos A', B', C' e D' .

Então, a transformação $t_2^{-1} \circ t \circ t_1$ leva o quadrângulo de referência em si mesmo.

Do mesmo modo, a transformação $t_2^{-1} \circ t' \circ t_1$ leva o triângulo de referência em si mesmo.

Uma vez que a identidade é a única transformação projetiva que leva um conjunto de quatro pontos em si mesmo, temos que, estas duas transformações são iguais à identidade.

Então,

$$t_2^{-1} \circ t \circ t_1 = t_2^{-1} \circ t' \circ t_1$$

$$\Leftrightarrow t = t'$$

Ou seja, a transformação projetiva que leva os pontos A, B, C e D em A', B', C' e D' respectivamente, é única.

■

Exemplo:

Determinemos a transformação projetiva que leva os pontos $[1 : 0 : 1], [-2 : 1 : 1], [0 : 1 : 2]$ e $[1 : 1 : 2]$ em $[-2 : 1 : 0], [0 : 3 : 1], [1 : 3 : 2]$ e $[1 : 1 : 4]$ respectivamente.

Em primeiro lugar determinemos a transformação projetiva que leva o quadrângulo de referência no primeiro conjunto de quatro pontos $[1 : 0 : 1]$, $[-2 : 1 : 1]$, $[0 : 1 : 2]$ e $[1 : 1 : 2]$ respetivamente.

A matriz associada a essa transformação será da forma:

$$A_1 = \begin{pmatrix} a & -2b & 0 \\ 0 & b & c \\ a & b & 2c \end{pmatrix}$$

uma vez que leva os pontos do triângulo de referência nos pontos $[1 : 0 : 1]$, $[-2 : 1 : 1]$ e $[0 : 1 : 2]$.

Para que transforme o ponto unitário no ponto $[1 : 1 : 2]$, temos que:

$$\begin{pmatrix} a & -2b & 0 \\ 0 & b & c \\ a & b & 2c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ou seja,

$$\begin{cases} a - 2b = 1 \\ b + c = 1 \\ a + b + 2c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \\ c = 2 \end{cases}$$

Ou seja, a matriz associada a essa transformação projetiva é a matriz

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

De seguida, calculemos a matriz associada à transformação projetiva que leva o quadrângulo de referência nos pontos $[-2 : 1 : 0]$, $[0 : 3 : 1]$, $[1 : 3 : 2]$ e $[1 : 1 : 4]$, ou seja:

$$A_2 = \begin{pmatrix} -2a & 0 & c \\ a & 3b & 3c \\ 0 & b & 2c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2a & 0 & c \\ a & 3b & 3c \\ 0 & b & 2c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ou seja,

$$\begin{cases} -2a + c = 1 \\ a + 3b + 3c = 1 \\ b + 2c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{8}{5} \\ b = -\frac{22}{5} \\ c = \frac{21}{5} \end{cases}$$

Então, a matriz associada a esta transformação é:

$$\begin{pmatrix} -\frac{16}{5} & 0 & \frac{21}{5} \\ \frac{8}{5} & -\frac{66}{5} & \frac{63}{5} \\ 0 & -\frac{22}{5} & \frac{42}{5} \end{pmatrix}$$

que podemos escrever como

$$A_2 = \begin{pmatrix} -16 & 0 & 21 \\ 8 & -66 & 63 \\ 0 & -22 & 42 \end{pmatrix}$$

Pelo teorema demonstrado anteriormente, temos que:

$$t = t_2 \circ t_1^{-1}$$

Sendo assim,

$$Adj(A_1) = \begin{pmatrix} -2 & -8 & 4 \\ -2 & -4 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

é a matriz associada a t_1^{-1} .

Vem então que:

$$A_2 \cdot Adj(A_1) = \begin{pmatrix} -16 & 0 & 21 \\ 8 & -66 & 63 \\ 0 & -22 & 42 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -8 & 4 \\ -2 & -4 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 65 & -43 \\ 53 & 11 & -37 \\ 2 & -38 & -2 \end{pmatrix}$$

é a matriz associada à transformação projetiva t que leva os pontos projetivos $[1 : 0 : 1]$, $[-2 : 1 : 1]$, $[0 : 1 : 2]$ e $[1 : 1 : 2]$ nos pontos $[-2 : 1 : 0]$, $[0 : 3 : 1]$, $[1 : 3 : 2]$ e $[1 : 1 : 4]$ respetivamente.

Terminamos esta secção sobre Transformações Projetivas com este importante teorema que nos irá permitir, no nosso estudo, demonstrar outras propriedades transformando qualquer quadrângulo projetivo num outro qualquer. Em particular, qualquer quadrângulo projetivo pode ser transformado no quadrângulo de referência que, pela simplicidade das coordenadas dos seus pontos, facilitará as nossas demonstrações.

2.4 O Princípio da Dualidade e os Teoremas Clássicos

Definição 2.4.1 No plano projetivo \mathbb{P} , dado um ponto A , designamos l_A a reta projetiva cujas coordenadas de Plucker são iguais às coordenadas homogêneas de A . Dizemos que A e l_A são **duais de Plucker**.

Como consequência desta definição temos as seguintes propriedades.

Proposição 2.4.2 *No plano projetivo \mathbb{P} ,*

1. *Toda a reta projetiva é dual de Plucker de um único ponto projetivo, isto é, para toda a reta projetiva l existe um e um só A tal que $l = l_A$.*
2. *Um ponto B é incidente com uma reta l_A se e só se A é incidente com a reta l_B .*
3. *Duas retas l_A e l_B são incidentes num ponto C se e só se a reta l_C incide nos pontos A e B .*

Demonstração:

1. Um ponto do plano projetivo é dado pelas suas coordenadas homogêneas e uma reta projetiva pelas suas coordenadas de Plucker.

Sendo assim, é óbvio que para toda a reta projetiva l existe um e um só A tal que $l = l_A$.

2. Sejam A e B dois pontos projetivos de coordenadas homogêneas $[\alpha : \beta : \gamma]$ e $[\alpha' : \beta' : \gamma']$, respetivamente.

Então l_A e l_B têm coordenadas de Plucker $[\alpha : \beta : \gamma]$ e $[\alpha' : \beta' : \gamma']$, respetivamente.

$$B \text{ é incidente com } l_A \Leftrightarrow \alpha \cdot \alpha' + \beta \cdot \beta' + \gamma \cdot \gamma' = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha' \cdot \alpha + \beta' \cdot \beta + \gamma' \cdot \gamma = 0 \Leftrightarrow A \text{ é incidente com } l_B$$

3. É uma consequência imediata do ponto anterior.

■

Definição 2.4.3 *Uma **dualidade** no plano projetivo é uma correspondência bijetiva entre pontos e retas que preserva a incidência.*

A dualidade de Plucker é um exemplo de dualidade. Como consequência temos,

O Princípio de Dualidade no Plano Projetivo

No plano projetivo, todos os enunciados que afetem pontos, retas e propriedades de incidência entre eles podem dualizar-se da seguinte forma:

Ponto que incide na reta \leftrightarrow Reta que incide no ponto.

Reta determinada pelos pontos \leftrightarrow Ponto determinado pela interseção das retas.

Exemplos:

1. Uma família de pontos incidentes numa reta, dualiza uma família de retas incidentes num ponto.

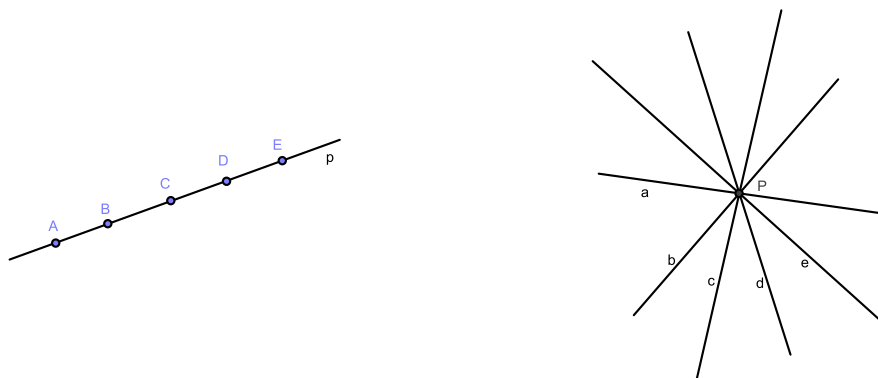


Fig. 2.14: Figuras duais.

2. Uma família de três pontos não colineares (A, B e C) e as três retas que os unem dualiza uma família de três retas não incidentes no mesmo ponto (a, b e c) e os três pontos onde se interseitam.

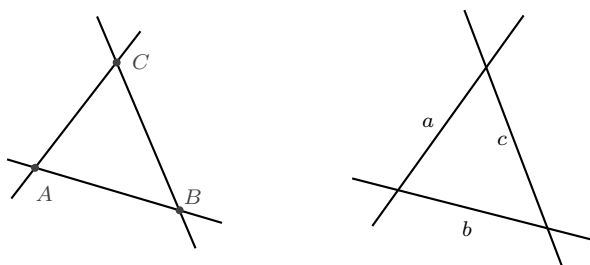


Fig. 2.15: Figuras auto-duais.

Neste caso, dizemos que se trata de figuras auto-duais.

O processo de dualização é particularmente interessante quando aplicado a teoremas, isto é, quando dualizamos um axioma ou um teorema (trocando as palavras ponto por reta, concorrentes por colineares, vértice por lado,...) obtemos outras proposições também verdadeiras, o que pode ser muito proveitoso, uma vez que, demonstrado um teorema, obtemos automaticamente o seu teorema dual, cuja demonstração se obtém facilmente, dualizando cada passo na demonstração do teorema original.

Vejam agora, como exemplo, dois teoremas muito importantes na Geometria Projectiva, nomeadamente o Teorema de Desargues e o Teorema de Pappus e os respectivos enunciados duais.

Teorema 2.4.4 (Teorema de Desargues projectivo).

Sejam $\{A, B, C\}$ e $\{A', B', C'\}$ dois triângulos do plano projectivo sem vértices em comum tais que as rectas $\langle A, A'\rangle$, $\langle B, B'\rangle$ e $\langle C, C'\rangle$ são incidentes num ponto O .

Considerem-se as intersecções:

$$P = \langle A, B \rangle \cap \langle A', B' \rangle$$

$$Q = \langle A, C \rangle \cap \langle A', C' \rangle$$

$$R = \langle C, B \rangle \cap \langle C', B' \rangle$$

Os pontos P , Q , e R são colineares.

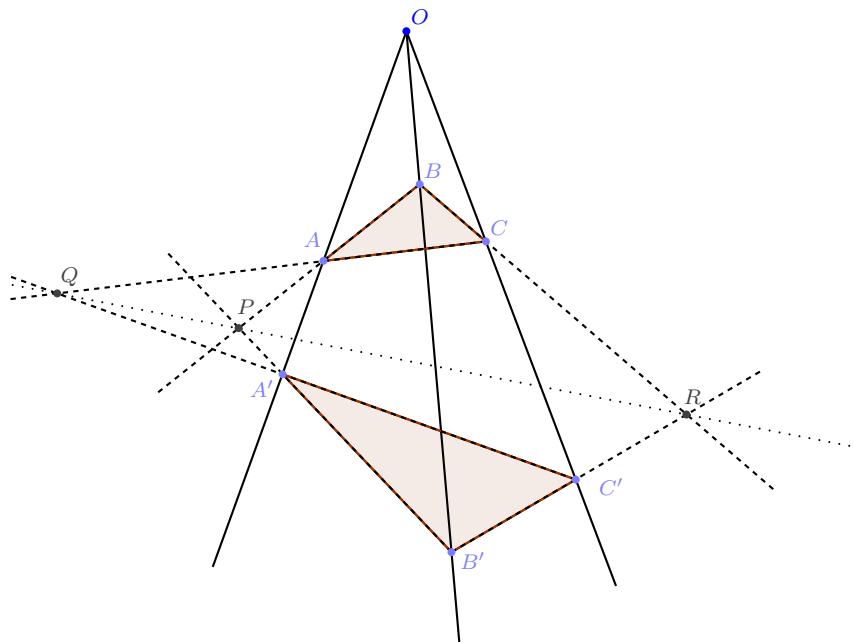


Fig. 2.16: Representação do Teorema de Desargues.

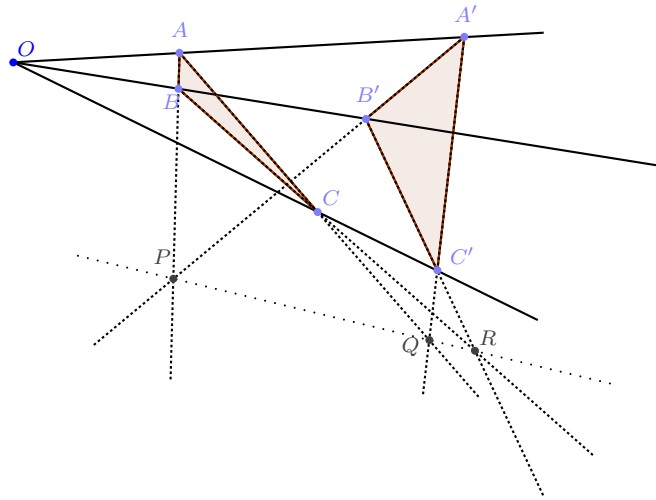


Fig. 2.17: Representação do Teorema de Desargues.

Demonstração:

Pelo teorema fundamental da Geometria Projetiva, existe uma transformação projetiva que leva qualquer conjunto de quatro pontos no quadrângulo de referência, ou seja, nos pontos $[1 : 0 : 0]$, $[0 : 1 : 0]$, $[0 : 0 : 1]$ e $[1 : 1 : 1]$.

Podemos então assumir que, por exemplo, os pontos A , B , C e O são, respetivamente, o triângulo de referência e o ponto unitário.

Ou seja, $A \equiv [1 : 0 : 0]$, $B \equiv [0 : 1 : 0]$, $C \equiv [0 : 0 : 1]$ e $O \equiv [1 : 1 : 1]$.

A equação da reta projetiva $\langle A, B \rangle$ é $z = 0$

Uma vez que $\langle A, A' \rangle$ incide em O , o ponto projetivo A' incide na recta projectiva $\langle O, A \rangle$ e esta tem como equação $y = z$.

Ou seja, o ponto A' tem coordenadas homogéneas da forma

$$[a : b : b] = \left[\frac{a}{b} : 1 : 1\right] = [p : 1 : 1], \text{ para } p = \frac{a}{b}, b \neq 0 \text{ e } a \neq b.$$

Se $b = 0$, então $A' \equiv [1 : 0 : 0]$, ou seja, $A = A'$, o que contraria a condição do teorema que obriga a que os dois triângulos não tenham vértices em comum.

Se $a = b$, então $A' \equiv [1 : 1 : 1]$, ou seja, $A' = O$, pelo que $a \neq b$ e portanto, $p \neq 1$.

Da mesma forma, B' incide em $\langle O, B \rangle$ de equação $x = z$.

O ponto B' tem coordenadas homogéneas da forma

$[c : d : c] = \left[1 : \frac{d}{c} : 1\right] = [1 : q : 1]$, para $q = \frac{d}{c}$, $c \neq 0$ e $d \neq c$, pela mesma razão que $b \neq 0$ e $a \neq b$.

A reta $\langle A', B' \rangle$ tem então, como equação,

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ p & 1 & 1 \\ 1 & q & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1 - q)x + (1 - p)y + (pq - 1)z = 0$$

$$P = \langle A, B \rangle \cap \langle A', B' \rangle:$$

$$\begin{cases} z = 0 \\ (1-q)x + (1-p)y + (pq-1)z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ y = \frac{1-q}{p-1}x \end{cases}$$

$$P \equiv \left[x : \frac{1-q}{p-1}x : 0 \right] = [p-1 : 1-q : 0]$$

Do mesmo modo obtemos que $Q \equiv [1-p : 0 : r-1]$, com $r \neq 1$ e $R \equiv [0 : q-1 : 1-r]$, com $q \neq 1$.

Verifiquemos agora que os pontos P , Q e R são colineares:

$$\begin{vmatrix} p-1 & 1-q & 0 \\ 1-p & 0 & r-1 \\ 0 & q-1 & 1-r \end{vmatrix} = (p-1)[-(r-1)(q-1)] + (1-q)[-(1-p)(1-r)] =$$

$$= -(p-1)(r-1)(q-1) + (p-1)(r-1)(q-1) = 0$$

Logo, P , Q e R são colineares. ■

Dualizando o Teorema de Desargues, temos:

Corolário 2.4.5 (*Dual do Teorema de Desargues*).

Sejam $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ três retas não incidentes no mesmo ponto e $\{\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}'\}$ outras três retas não incidentes no mesmo ponto do plano projetivo tais que $\mathbf{a} \cap \mathbf{a}'$, $\mathbf{b} \cap \mathbf{b}'$ e $\mathbf{c} \cap \mathbf{c}'$ são incidentes na reta \mathbf{o} .

Considerem-se as retas:

$$\mathbf{p} = \langle \mathbf{a} \cap \mathbf{b}, \mathbf{a}' \cap \mathbf{b}' \rangle$$

$$\mathbf{q} = \langle \mathbf{a} \cap \mathbf{c}, \mathbf{a}' \cap \mathbf{c}' \rangle$$

$$\mathbf{r} = \langle \mathbf{c} \cap \mathbf{b}, \mathbf{c}' \cap \mathbf{b}' \rangle$$

As retas \mathbf{p} , \mathbf{q} e \mathbf{r} são incidentes num ponto.

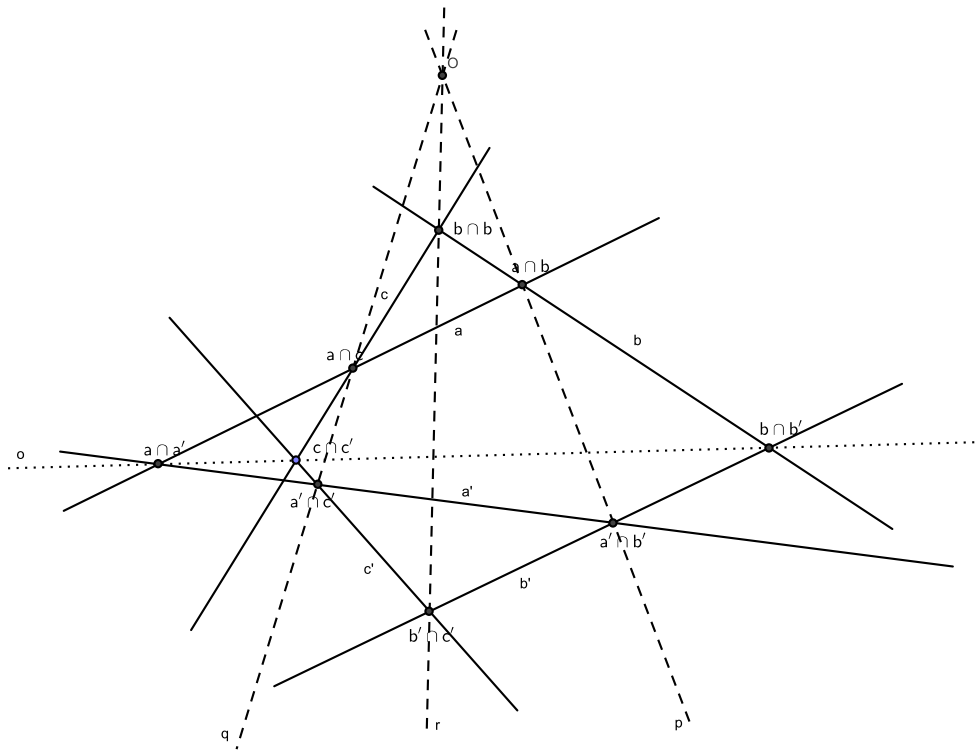


Fig. 2.18: Representação do dual do Teorema de Desargues.

Note-se que, neste caso, a dualização do Teorema de Desargues levou-nos ao seu recíproco.

Teorema 2.4.6 (Teorema de Pappus projetivo).

No plano projetivo, consideremos $\{A, B, C\}$ três pontos numa reta l , $\{A', B', C'\}$ três pontos numa reta l' , todos eles distintos e distintos do ponto de interseção O das retas l e l' .

Definamos os pontos,

$$P = \langle A, B' \rangle \cap \langle A', B \rangle$$

$$Q = \langle A, C' \rangle \cap \langle A', C \rangle$$

$$R = \langle C, B' \rangle \cap \langle C', B \rangle$$

Os pontos P , Q , e R são colineares.

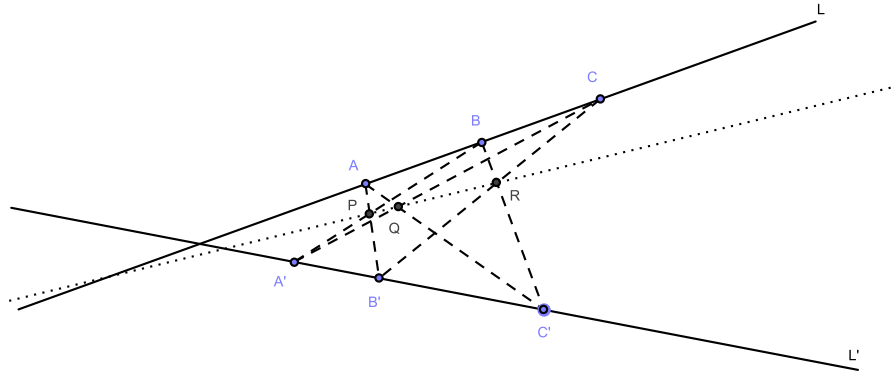


Fig. 2.19: Representação do Teorema de Pappus.

Demonstração:

Novamente, usando o Teorema Fundamental da Geometria Projetiva, assumamos que $A \equiv [1 : 0 : 0]$, $B \equiv [0 : 1 : 0]$, $A' \equiv [0 : 0 : 1]$ e $B' \equiv [1 : 1 : 1]$.

A reta $\langle A, B' \rangle$ é definida pela equação $y = z$ e a reta $\langle A', B \rangle$ pela equação $x = 0$.

$$P = \langle A, B' \rangle \cap \langle A', B \rangle = [0 : y : y] = [0 : 1 : 1].$$

C' incide na reta projetiva $\langle A', B' \rangle$ de equação $x = y$.

Então, C' tem coordenadas homogêneas da forma

$$C' \equiv [a : a : b] = [1 : 1 : \frac{b}{a}] = [1 : 1 : p], \text{ com } p = \frac{b}{a}, a \neq 0 \text{ e } b \neq a.$$

Se $a = 0$, então $C' \equiv [0 : 0 : 1]$, ou seja, $A' = C'$, o que contraria as condições do teorema.

Se $b = a$, então $C' \equiv [1 : 1 : 1]$, ou seja, $B' = C'$ que, do mesmo modo, contraria as condições do teorema, pelo que, $a \neq 0$ e $b \neq a$, ou seja, $p \neq 1$.

Do mesmo modo, C incide na reta projetiva $\langle A, B \rangle$ de equação $z = 0$.

Então, C tem coordenadas homogêneas da forma $C \equiv [c : d : 0] = [\frac{c}{d} : 1 : 0] = [q : 1 : 0]$, com $q = \frac{c}{d}$, $d \neq 0$ e $c \neq d$.

Se $d = 0$, então $C \equiv [1 : 0 : 0]$, ou seja, $A = C$, o que contraria as condições do teorema.

Se $c = d$, então $C \equiv [1 : 1 : 0]$ então C incide simultaneamente em $\langle A', B' \rangle$ e em $\langle A, B \rangle$, ou seja, é o ponto de interseção das duas retas, o que também contraria as condições do teorema.

$\langle A, C' \rangle$ é definida por:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & p \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -py + z = 0$$

$\langle A', C \rangle$ é definida por:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ q & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -x + qy = 0$$

$Q = \langle A, C' \rangle \cap \langle A', C \rangle$:

$$\begin{cases} -py + z = 0 \\ -x + qy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = py \\ x = qy \end{cases}$$

$$Q \equiv [qy : y : py] = [q : 1 : p]$$

$\langle C, B' \rangle$ é definida por:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ q & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - qy + (q - 1)z = 0$$

$\langle C', B \rangle$ é definida por:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & p \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow px - z = 0$$

$R = \langle C, B' \rangle \cap \langle C', B \rangle$:

$$\begin{cases} x - qy + (q - 1)z = 0 \\ px - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1+pq-p}{q}x \\ z = px \end{cases}$$

$$R \equiv \left[x : \frac{1+pq-p}{q}x : px \right] = [q : 1 + pq - p : pq]$$

Verifiquemos que P , Q e R são colineares:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ q & 1 & p \\ q & 1 + pq - p & pq \end{vmatrix} = 0 + pq - pq^2 + q + pq^2 - pq - q = 0$$

Logo, P , Q e R são colineares.

■

Dualizando o Teorema de Pappus, obtemos o Teorema de Brianchon.

Teorema 2.4.7 (Teorema de Brianchon).

No plano projetivo, consideremos $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ três retas incidentes num ponto L , $\{\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}'\}$ três retas incidentes num ponto L' , todas elas distintas e distintas da reta $\langle L, L' \rangle$.

Definamos as retas,

$$p = \langle a \cap b', a' \cap b \rangle$$

$$q = \langle a \cap c', a' \cap c \rangle$$

$$r = \langle b \cap c', b' \cap c \rangle$$

As retas p , q e r são incidentes num ponto.

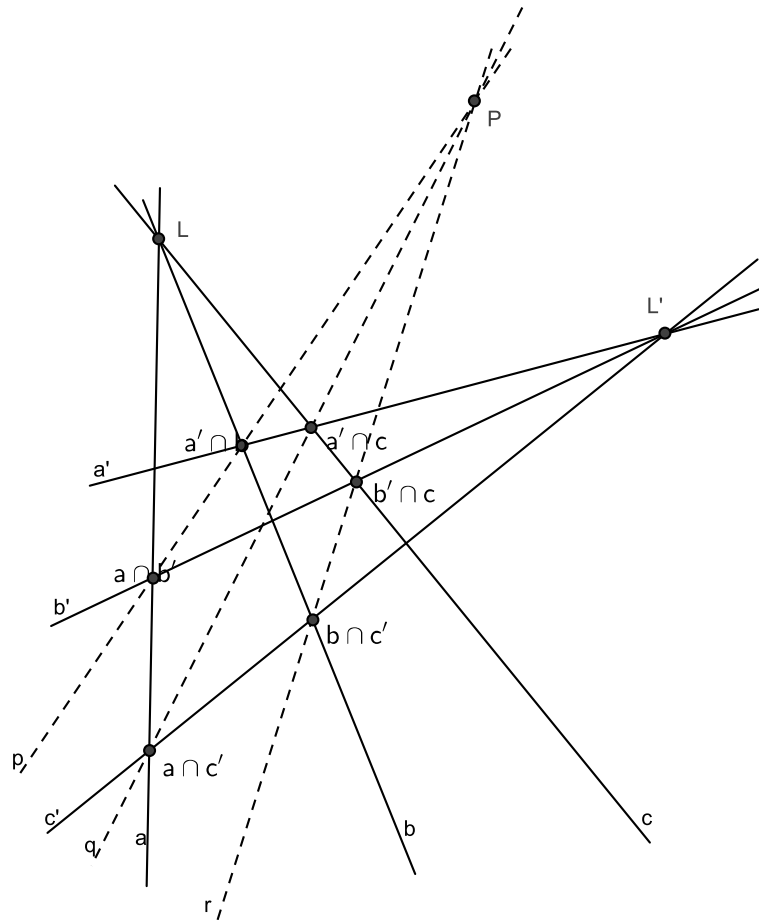


Fig. 2.20: Representação do Teorema de Brianchon.

Como pudemos observar com os teoremas anteriores e respectivas dualizações, obtivemos dois novos teoremas aplicando o Princípio da Dualidade e poderíamos continuar dualizando outros teoremas e obtendo, desta forma, novos teoremas, não necessitando de demonstração.

Todos estes teoremas, uma vez demonstrados na Geometria Projetiva, são automaticamente válidos na Geometria Afim. Recorde-se que uma reta projetiva corresponde a

um plano vetorial em \mathbb{R}^3 e o traço afim de duas retas projetivas depende do plano afim considerado, no entanto, duas retas projetivas encontram-se sempre num ponto, ainda que esse ponto esteja no infinito. Efectivamente, quando traduzimos um teorema demonstrado na Geometria Projetiva para a Geometria Afim, temos que ter o cuidado de verificar, nas hipóteses e na conclusão, os casos de retas paralelas. Sendo assim, um teorema enunciado e demonstrado na Geometria Projetiva pode originar vários teoremas na Geometria Afim.

Por exemplo, o Teorema de Desargues dá origem a três outros teoremas, dos quais enunciaremos um de seguida.

Corolário 2.4.8 *Sejam $\{A, B, C\}$ e $\{A', B', C'\}$ dois triângulos distintos sem vértices comuns de um plano afim, tais que as retas $\langle A, A'\rangle$, $\langle B, B'\rangle$ e $\langle C, C'\rangle$ são incidentes num ponto O ou são paralelas. Se existirem os pontos de interseção*

$$P = \langle A, B \rangle \cap \langle A', B' \rangle$$

$$Q = \langle A, C \rangle \cap \langle A', C' \rangle$$

e as retas $\langle C, B \rangle$ e $\langle C', B' \rangle$ forem paralelas, então a reta PQ é paralela àquelas retas.

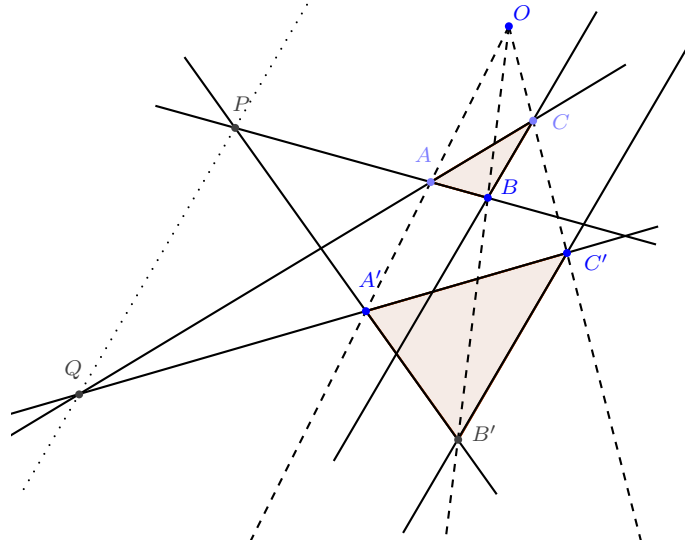


Fig. 2.21: Representação de um dos corolários do Teorema de Desargues no plano Afim.

Poderíamos, por exemplo, enunciar também o Teorema de Brianchon no plano afim, tendo o cuidado de destacar todos os casos particulares de retas paralelas.

Por exemplo, podemos enunciar o seguinte corolário:

Corolário 2.4.9 *No plano afim, consideremos $\{a, b, c\}$ três retas incidentes num ponto L , $\{a', b', c'\}$ três retas incidentes num ponto L' , todas elas distintas e distintas de $\langle L, L' \rangle$.*

Se existirem as retas:

$$p = \langle a \cap b', a' \cap b \rangle$$

$$r = \langle b \cap c', b' \cap c \rangle$$

e as retas a e c' forem paralelas, então a reta definida por $\langle a' \cap c, p \cap r \rangle$ é paralela às retas a e c' .

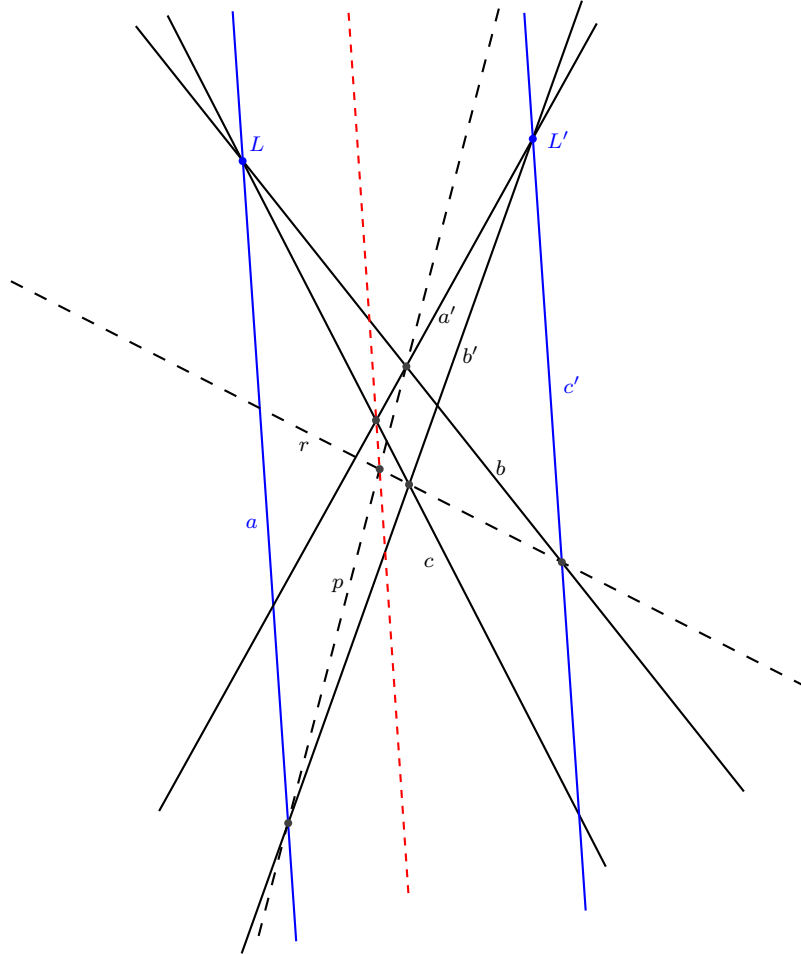


Fig. 2.22: Representação de um dos corolários do Teorema de Brianchon no plano Afim.

2.5 A Razão Cruzada

Na Geometria Afim, as razões entre os comprimentos são preservadas pelas transformações afins. O mesmo não se verifica na Geometria Projetiva. Aqui nem faz sentido falar, por exemplo em ponto médio, porque este não é preservado pelas transformações projetivas, como podemos observar na figura seguinte.

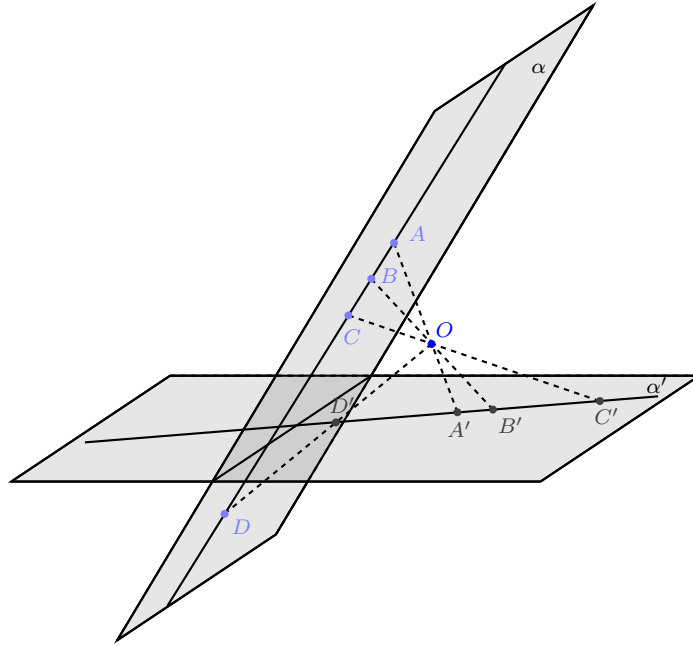


Fig. 2.23: Transformação projetiva de pontos colineares.

Na figura, B é o ponto médio de $[AC]$ e, no entanto, B' não é o ponto médio de $[A'C']$.

Podemos verificar também que, por exemplo, B está entre A e D e B' não está entre A' e D' . Isto leva-nos a afirmar que a ordem, na reta, pela qual se apresentam os pontos também não é uma propriedade projetiva, isto é, não é preservada pelas transformações projetivas. Mas, existe uma quantidade que é preservada pelas transformações projetivas que se designa por **razão cruzada**. A razão cruzada é o invariante métrico associado a uma família de pontos projetivos de modo análogo à razão simples na Geometria Afim.

Definição 2.5.1 *Sejam $\{A, B, C, D\}$ quatro pontos colineares e distintos do plano projetivo \mathbb{P} e sejam a, b, c e d vectores em \mathbb{R}^3 tais que $A = [a]$, $B = [b]$, $C = [c]$ e $D = [d]$.*

*Suponhamos que $C = [\alpha a + \beta b]$ e $D = [\gamma a + \delta b]$. Definimos a **razão cruzada** de A, B, C e D e designamos por (A, B, C, D) como sendo o escalar:*

$$(A, B, C, D) = \frac{\beta}{\alpha} / \frac{\delta}{\gamma}$$

Exemplo:

Sejam $A \equiv [0 : 1 : 1]$, $B \equiv [1 : 0 : -2]$, $C \equiv [1 : 1 : -1]$ e $D \equiv [1 : 2 : 0]$ quatro pontos colineares e calculemos a razão cruzada (A, B, C, D) .

$$(1, 1, -1) = \alpha (0, 1, 1) + \beta (1, 0 - 2) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

$$(1, 2, 0) = \gamma (0, 1, 1) + \delta (1, 0 - 2) \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 2 \\ \delta = 1 \end{cases}$$

$$(A, B, C, D) = \frac{1}{1} / \frac{1}{2} = 2$$

Se, por exemplo, tivéssemos utilizado outras coordenadas homogéneas para representar os pontos do exemplo anterior, teríamos obtido o mesmo resultado, como podemos verificar a seguir.

Consideremos para A, B, C e D as seguintes coordenadas:

$$A \equiv [0 : 2 : 2], B \equiv [3 : 0 : -6], C \equiv [2 : 2 : -2] \text{ e } D \equiv [\frac{1}{2} : 1 : 0]$$

Então,

$$(2, 2, -2) = \alpha (0, 2, 2) + \beta (3, 0, -6) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right) = \gamma (0, 2, 2) + \delta (3, 0, -6) \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = \frac{1}{2} \\ \delta = \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$(A, B, C, D) = \frac{2/3}{1} / \frac{1/6}{1/2} = 2$$

A razão cruzada não depende das coordenadas homogéneas escolhidas para representar os quatro pontos, como se enuncia na seguinte proposição:

Proposição 2.5.2 *A razão cruzada está bem definida, isto é, não depende dos vectores escolhidos como representantes dos pontos do plano projetivo.*

Demonstração:

Sejam $A = [a]$, $B = [b]$, $C = [c]$ e $D = [d]$ quatro pontos colineares e distintos.

Sabemos que, se $c = \alpha a + \beta b$ e $d = \gamma a + \delta b$, então

$$(A, B, C, D) = \frac{\beta}{\alpha} / \frac{\delta}{\gamma}$$

Suponhamos agora que escolhíamos outras coordenadas homogéneas $A' = [a']$, $B' = [b']$, $C' = [c']$ e $D' = [d']$ para representar os quatro pontos. Então,

$$a' = k_1 a, \quad b' = k_2 b, \quad c' = k_3 c, \quad d' = k_4 d$$

Temos que:

$$c' = \alpha' a' + \beta' b' \quad \text{e} \quad d' = \gamma' a' + \delta' b'$$

Ora,

$$\begin{aligned} c' &= \alpha'a' + \beta'b' \quad \Leftrightarrow \quad k_3c = \alpha'k_1a + \beta'k_2b \\ \Leftrightarrow k_3(\alpha a + \beta b) &= \alpha'k_1a + \beta'k_2b \quad \Leftrightarrow \quad \alpha' = \frac{k_3\alpha}{k_1} \quad \wedge \quad \beta' = \frac{k_3\beta}{k_2} \end{aligned}$$

Do mesmo modo,

$$\begin{aligned} d' &= \gamma'a' + \delta'b' \quad \Leftrightarrow \quad k_4d = \gamma'k_1a + \delta'k_2b \\ \Leftrightarrow k_4(\gamma a + \delta b) &= \gamma'k_1a + \delta'k_2b \quad \Leftrightarrow \quad \gamma' = \frac{k_4\gamma}{k_1} \quad \wedge \quad \delta' = \frac{k_4\delta}{k_2} \end{aligned}$$

Então,

$$\frac{\beta'}{\alpha'} / \frac{\delta'}{\gamma'} = \frac{\frac{k_3\beta}{k_2} / \frac{k_4\delta}{k_2}}{\frac{k_3\alpha}{k_1} / \frac{k_4\gamma}{k_1}} = \frac{\beta k_1}{\alpha k_2} / \frac{\delta k_1}{\gamma k_2} = \frac{\beta}{\alpha} / \frac{\delta}{\gamma}$$

■

A razão cruzada de quatro pontos depende da ordem pela qual os representamos, isto é,

$$(A, B, C, D) \neq (B, A, C, D) \neq (A, C, B, D) \neq \dots$$

Contudo, existe uma relação entre estes valores, como podemos verificar no seguinte teorema.

Teorema 2.5.3 *Propriedades da razão cruzada.*

Sejam A, B, C e D quatro pontos colineares e distintos do plano projetivo tais que $(A, B, C, D) = \lambda$. Então:

1. $(B, A, C, D) = (A, B, D, C) = \frac{1}{\lambda}$;
2. $(A, C, B, D) = (D, B, C, A) = 1 - \lambda$.

Demonstração:

Sejam $A \equiv [a]$, $B \equiv [b]$, $C \equiv [c]$ e $D \equiv [d]$ quatro pontos colineares e distintos e seja $c = \alpha a + \beta b$ e $d = \gamma a + \delta b$

Então,

$$(A, B, C, D) = \frac{\beta}{\alpha} / \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\beta\gamma}{\alpha\delta} = \lambda$$

1. Determinemos (B, A, C, D) .

$$(B, A, C, D) = \frac{\alpha}{\beta} / \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma} = \frac{1}{\lambda}$$

Do mesmo modo se provaria que $(A, B, D, C) = \frac{1}{\lambda}$

2. Determinemos (A, C, B, D)

$$c = \alpha a + \beta b \quad \Leftrightarrow \quad b = -\frac{\alpha}{\beta}a + \frac{1}{\beta}c$$

$$d = \gamma a + \delta b \quad \Leftrightarrow \quad d = \gamma a + \delta \left(-\frac{\alpha}{\beta}a + \frac{1}{\beta}c \right) \quad \Leftrightarrow \quad d = \left(\gamma - \frac{\delta\alpha}{\beta} \right) a + \frac{\delta}{\beta}c$$

Então,

$$(A, C, B, D) = \frac{\frac{1}{\beta}}{-\frac{\alpha}{\beta}} / \frac{\frac{\delta}{\beta}}{\gamma - \frac{\delta\alpha}{\beta}} = \frac{-\gamma\beta + \delta\alpha}{\alpha\delta} = 1 - \frac{\gamma\beta}{\alpha\delta} = 1 - \lambda$$

Do mesmo modo, se provaria que $(D, B, C, A) = 1 - \lambda$

■

Exemplo:

Aplicando estas propriedades ao exemplo dado anteriormente em que $(A, B, C, D) = 2$, podemos facilmente determinar outras razões cruzadas, tais como, por exemplo,

$$(B, A, C, D) = (A, B, D, C) = \frac{1}{2}$$

ou

$$(A, C, B, D) = (D, B, C, A) = 1 - 2 = -1$$

ou

$$\begin{aligned} (C, D, A, B) &= 1 - (C, A, D, B) = 1 - \frac{1}{(A, C, D, B)} = 1 - \frac{1}{\frac{1}{(A, C, B, D)}} = \\ &= 1 - (A, C, B, D) = 1 - [1 - (A, B, C, D)] = (A, B, C, D) = 2 \end{aligned}$$

Como já foi referido anteriormente e demonstraremos de seguida, a razão cruzada é uma propriedade projetiva.

Teorema 2.5.4 *Seja t uma transformação projetiva, e sejam A, B, C, D quatro pontos colineares e distintos em \mathbb{P} .*

Se $A' = t(A)$, $B' = t(B)$, $C' = t(C)$ e $D' = t(D)$, então

$$(A, B, C, D) = (A', B', C', D')$$

Demonstração:

Sejam $A = [a]$, $B = [b]$, $C = [c]$ e $D = [d]$, quatro pontos projetivos colineares e distintos, tais que: $c = \alpha a + \beta b$ e $d = \gamma a + \delta b$.

$$(A, B, C, D) = \frac{\beta}{\alpha} / \frac{\delta}{\gamma}$$

Se t é uma transformação projetiva, então existe uma matriz 3×3 invertível, M , tal que:

$$A' = t(A) = [Ma]$$

$$B' = t(B) = [Mb]$$

$$C' = t(C) = [Mc]$$

$$D' = t(D) = [Md]$$

Então,

$$c = \alpha a + \beta b \quad \Leftrightarrow \quad Mc = M(\alpha a + \beta b) \quad \Leftrightarrow \quad c' = \alpha a' + \beta b'$$

$$d = \gamma a + \delta b \quad \Leftrightarrow \quad Md = M(\gamma a + \delta b) \quad \Leftrightarrow \quad d' = \gamma a' + \delta b'$$

isto é,

$$(A', B', C', D') = \frac{\beta}{\alpha} / \frac{\delta}{\gamma} = (A, B, C, D)$$

■

Um outro resultado importante é o que enunciaremos na proposição seguinte e que nos permite determinar um quarto ponto numa reta, conhecendo três pontos e a razão cruzada dos quatro pontos.

Proposição 2.5.5 *Unicidade do quarto ponto.*

Sejam A, B, C, X e Y pontos colineares do plano projetivo tais que

$$(A, B, C, X) = (A, B, C, Y)$$

Então $X = Y$

Demonstração:

Sejam $A = [a]$, $B = [b]$, $C = [c]$, $X = [x]$ e $Y = [y]$, cinco pontos projetivos colineares, tais que: $c = \alpha a + \beta b$, $x = \gamma a + \delta b$ e $y = \lambda a + \mu b$.

Então,

$$(A, B, C, X) = \frac{\beta}{\alpha} / \frac{\delta}{\gamma}$$

e

$$(A, B, C, Y) = \frac{\beta}{\alpha} / \frac{\mu}{\lambda}$$

Sabemos que $(A, B, C, X) = (A, B, C, Y)$, isto é,

$$\frac{\beta}{\alpha} / \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\beta}{\alpha} / \frac{\mu}{\lambda}$$

ou seja,

$$\frac{\beta\gamma}{\alpha\delta} = \frac{\beta\lambda}{\alpha\mu} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\lambda}{\mu} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{\gamma\mu}{\delta}$$

Então,

$$y = \frac{\gamma\mu}{\delta}a + \mu b = \frac{\mu}{\delta}(\gamma a + \delta b) = \frac{\mu}{\delta}x$$

Como as coordenadas de um ponto projetivo são únicas a menos de multiplicação por um escalar, temos que $X = Y$.

■

Exemplo:

Consideremos os pontos projetivos $A \equiv [1 : 2 : 3]$, $B \equiv [1 : 0 : 1]$ e $C \equiv [1 : 1 : 2]$ colineares e determinemos o ponto D , sabendo que $(A, B, C, D) = 3$.

$$(1, 1, 2) = \alpha(1, 2, 3) + \beta(1, 0, 1)$$

$$\begin{aligned}
& \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ 2\alpha = 1 \\ 3\alpha + \beta = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{1}{2} \\ \alpha = \frac{1}{2} \end{cases} \\
& (d_1, d_2, d_3) = \gamma(1, 2, 3) + \delta(1, 0, 1) \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma + \delta = d_1 \\ 2\gamma = d_2 \\ 3\gamma + \delta = d_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta = \frac{2d_1 - d_2}{2} \\ \gamma = \frac{d_2}{2} \\ d_3 = d_2 + d_1 \end{cases} \\
& (A, B, C, D) = 3 \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} / \frac{\frac{2d_1 - d_2}{2}}{\frac{d_2}{2}}} = 3 \Leftrightarrow \frac{d_2}{2d_1 - d_2} = 3 \Leftrightarrow d_2 = \frac{3}{2}d_1 \\
& d_3 = d_2 + d_1 \Leftrightarrow d_3 = \frac{5}{2}d_1 \\
& D \equiv \left[d_1 : \frac{3}{2}d_1 : \frac{5}{2}d_1 \right] = [2 : 3 : 5]
\end{aligned}$$

Relacionemos agora a razão cruzada com a razão simples. Para tal, relembremos que a razão simples de três pontos alinhados A, B e C num plano afim é o valor da razão entre os segmentos orientados $\frac{AC}{CB}$, cujo sinal é positivo ou negativo consoante os seus sentidos sejam coincidentes ou opostos, ou seja, é o valor λ tal que $\vec{AC} = \lambda \vec{CB}$.

Proposição 2.5.6 Relação entre a razão cruzada e a razão simples.

Sejam A, B, C e D quatro pontos colineares e distintos do plano projetivo, e \mathbf{r}_∞ uma reta projetiva.

1. Se a reta projetiva \mathbf{r}_∞ não incide com nenhum dos pontos, tem-se

$$(A, B, C, D) = \frac{(A, B, C)}{(A, B, D)}$$

2. Se a reta projetiva \mathbf{r}_∞ incide no ponto D , tem-se

$$(A, B, C, D) = -(A, B, C)$$

onde (A, B, C) designa a razão simples no plano afim quando enviamos \mathbf{r} ao infinito.

Demonstração:

1. Sejam A, B, C e D quatro pontos colineares e \mathbf{r} uma reta projetiva que não incide em nenhum deles.

Enviar ao infinito \mathbf{r} consiste em identificar os pontos A, B, C e D do plano projetivo com a interseção das retas vetoriais que os definem com um plano afim π paralelo ao plano vetorial que define \mathbf{r} .

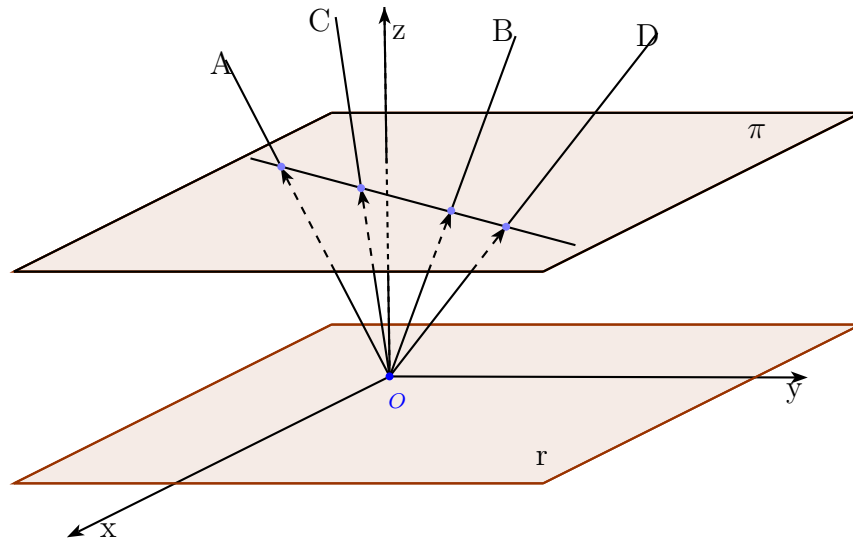


Fig. 2.24:

Sejam $A = [a]$, $B = [b]$, $C = [c]$ e $D = [d]$, quatro pontos projetivos.

Por definição, $(A, B, C, D) = \frac{\alpha}{\beta} / \frac{\delta}{\gamma}$, onde $c = \alpha a + \beta b$ e $d = \gamma a + \delta b$

Podemos supor que os representantes a, b, c e d dos pontos A, B, C e D , respectivamente, pertencem ao plano π .

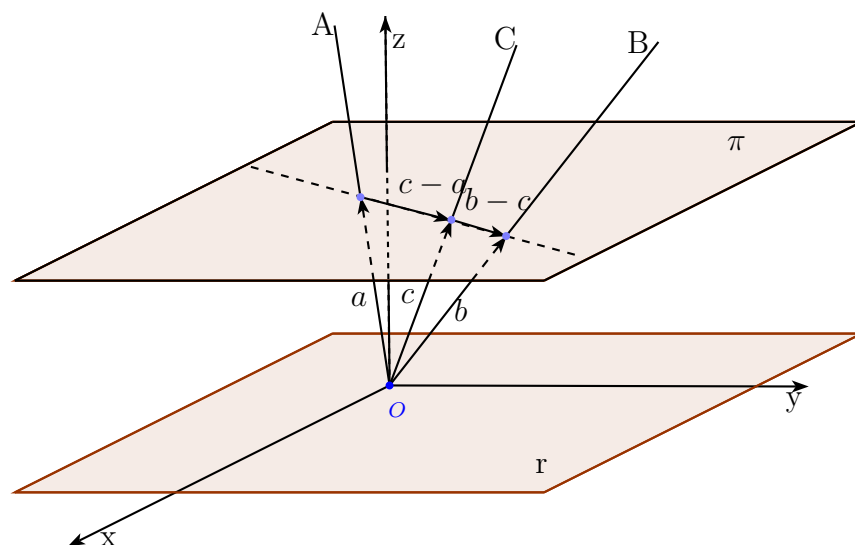


Fig. 2.25:

Então $c - a = (\alpha - 1)a + \beta b$ e $b - c = -\alpha a + (1 - \beta)b$ são vectores proporcionais e $c - a = \lambda(b - c)$, com $(A, B, C) = \lambda$.

Assim,

$$(\alpha - 1)a + \beta b = \lambda(-\alpha a + (1 - \beta)b)$$

donde,

$\lambda = \frac{\alpha-1}{-\alpha} = \frac{\beta}{1-\beta}$ porque $\{a, b\}$ são independentes.

Note-se ainda que, $\frac{\alpha-1}{-\alpha} = \frac{\beta}{1-\beta}$ implica que $(\alpha - 1)(1 - \beta) = -\alpha\beta$

donde $\alpha - \alpha\beta - 1 + \beta = -\alpha\beta$ e então $\alpha + \beta = 1$.

Em particular, $\alpha - 1 = -\beta$ e obtemos

$$(A, B, C) = \lambda = \frac{\alpha - 1}{-\alpha} = \frac{-\beta}{-\alpha} = \frac{\beta}{\alpha}$$

Seguindo o mesmo raciocínio, obtemos que $(A, B, D) = \frac{\delta}{\gamma}$.

E então,

$$(A, B, C, D) = \frac{\beta}{\alpha} / \frac{\delta}{\gamma} = \frac{(A, B, C)}{(A, B, D)}$$

2. Seguindo o raciocínio da prova anterior, se $A = [a]$, $B = [b]$ e $C = [c]$, com a, b, c no plano α , então $c = \alpha a + \beta b$ e $(A, B, C) = \frac{\beta}{\alpha}$

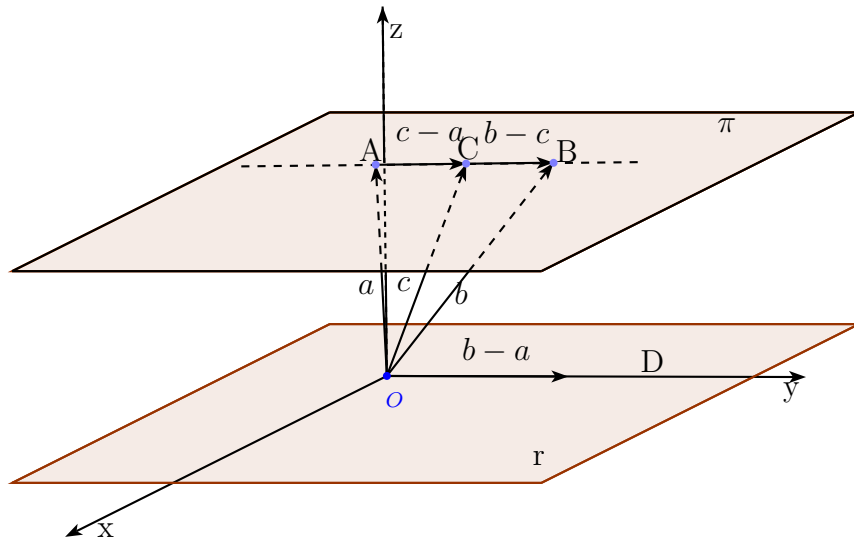


Fig. 2.26:

Como estamos a supor que D está no infinito e que é colinear com A e B , resulta que $D = [b - a]$, e portanto

$$(A, B, C, D) = \frac{\beta}{\alpha} / \frac{-1}{1} = -\frac{\beta}{\alpha} = -(A, B, C)$$

■

Esta proposição permite-nos determinar a razão cruzada de quaisquer quatro pontos projetivos colineares e distintos conhecidas as suas distâncias.

Por exemplo, se nenhum dos quatro pontos for um ponto no infinito, temos que,

$$(A, B, C, D) = \frac{(A, B, C)}{(A, B, D)} = \frac{AC}{CB} / \frac{AD}{DB}$$

Se D for um ponto no infinito,

$$(A, B, C, D) = -(A, B, C) = -\frac{AC}{CB}$$

Se A , B ou C forem pontos no infinito, poderemos utilizar a proposição anterior e o teorema 2.5.3. e deduzir a razão cruzada (A, B, C, D) .

Assim, se A for um ponto no infinito,

$$(A, B, C, D) = 1 - (D, B, C, A) = 1 - (D, B, C) = 1 - \frac{DC}{CB}$$

Se B for um ponto no infinito,

$$\begin{aligned} (A, B, C, D) &= 1 - (A, C, B, D) = 1 - \frac{1}{(A, C, D, B)} = 1 - \frac{1}{-(A, C, D)} = \\ &= 1 + \frac{1}{\frac{AD}{DC}} = 1 + \frac{DC}{AD} \end{aligned}$$

Se C for um ponto no infinito,

$$(A, B, C, D) = \frac{1}{(A, B, D, C)} = \frac{1}{-(A, B, C)} = \frac{1}{-\frac{AD}{DB}} = -\frac{DB}{AD}$$

Definição 2.5.7 Pontos em divisão harmónica.

Quatro pontos A , B , C e D , colineares e distintos, estão em divisão harmónica se e só se verificarem $(A, B, C, D) = -1$

Neste caso, dizemos que A e B estão harmonicamente separados por C e D ou que C é o harmónico conjugado de D relativamente a A e B.

Podemos interpretar esta definição dizendo que quatro pontos colineares e distintos estão em divisão harmónica se, ao enviarmos ao infinito o ponto D, o ponto C é o ponto médio entre os pontos A e B.

Proposição 2.5.8 *Sejam a, b, c, d quatro retas projetivas incidentes num ponto P , e r e r' outras duas retas projetivas distintas, que não passam pelo ponto P .*

Definimos

$$A = a \cap r, \quad B = b \cap r, \quad C = c \cap r, \quad D = d \cap r$$

$$A' = a \cap r', \quad B' = b \cap r', \quad C' = c \cap r', \quad D' = d \cap r'$$

Então

$$(A, B, C, D) = (A', B', C', D')$$

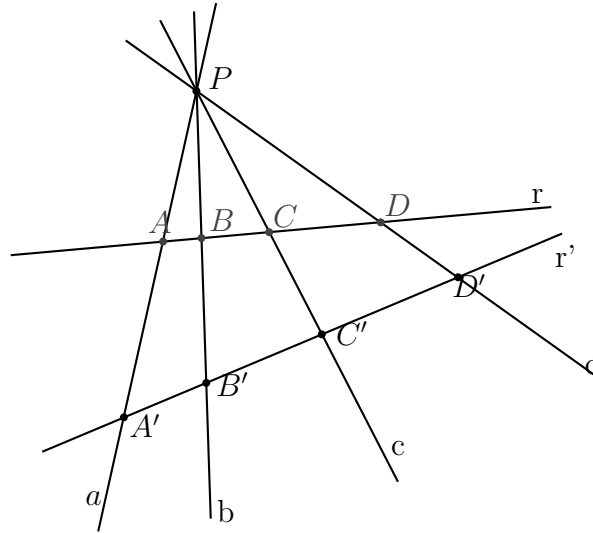


Fig. 2.27:

Demonstração:

Seja $O = r \cap r'$ (ponto de interseção das duas retas).

Há duas possibilidades:

1. O ponto $O \notin \{A, B, C, D\} \cup \{A', B', C', D'\}$.

2. O ponto O é igual a algum dos pontos considerados.

Podemos supor que $O = D$.

Então $O \in \mathbf{d}$ e como $O \in \mathbf{r}'$, temos que $O = \mathbf{d} \cap \mathbf{r}' = D'$, isto é, $D = D'$.

Enviando a reta projetiva OP ao infinito, obtemos

- no caso 1.

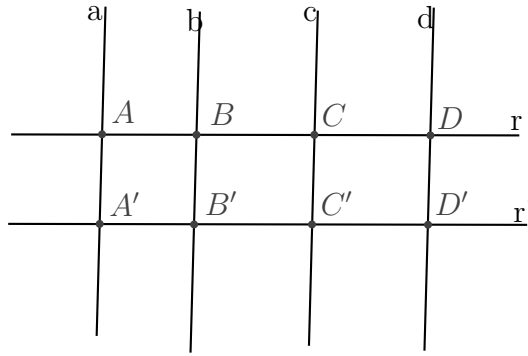


Fig. 2.28:

e obtemos $(A, B, C, D) = \frac{(A, B, C)}{(A, B, D)} = \frac{(A', B', C')}{(A', B', D')} = (A', B', C', D')$

- no caso 2.

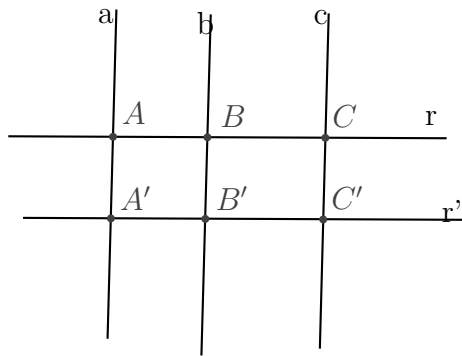


Fig. 2.29:

verificando que $(A, B, C, D) = -(A, B, C) = -(A', B', C') = (A', B', C', D')$. porque D e D' são os pontos no infinito de \mathbf{r} e \mathbf{r}' , respetivamente.

■

Todos estes resultados podem ter grande utilidade no cálculo de distâncias.

Se tivermos uma fotografia tirada sob um ângulo qualquer e quisermos saber distâncias reais, conhecidas outras distâncias, uma vez que a colinearidade é invariante sob a perspectiva, a colinearidade de qualquer reta na realidade é uma reta na fotografia e a razão cruzada de quaisquer quatro pontos é igual à das suas imagens na fotografia.

Exemplo de aplicação da razão cruzada:

Suponhamos que pretendemos, numa estrada, determinar a distância entre duas localidades, digamos A e B, e sabemos que D dista de A 12 Km e C dista de A 8 Km.

Dispomos de uma fotografia, onde medimos as distâncias e temos que $A'B' = 1\text{cm}$, $A'C' = \frac{5}{4}\text{cm}$ e $A'D' = 3\text{cm}$, como se apresenta no esquema seguinte:

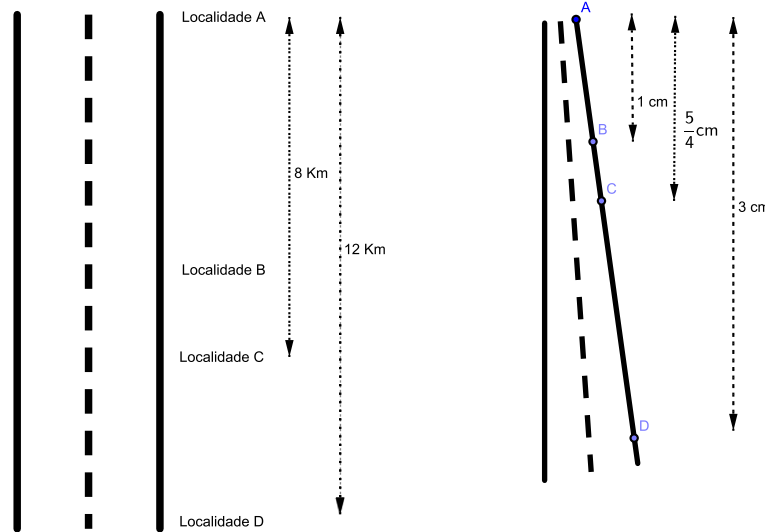


Fig. 2.30: Representação de uma estrada e respetiva fotografia.

Ora,

$$(A, B, C, D) = (A', B', C', D') \Leftrightarrow \frac{AC}{CB} / \frac{AD}{DB} = \frac{A'C'}{C'B'} / \frac{A'D'}{D'B'}$$

$$\Leftrightarrow \frac{8}{-(8-AB)} / \frac{12}{-(12-AB)} = \frac{\frac{5}{4}}{-\frac{1}{4}} / \frac{3}{-2} \Leftrightarrow \frac{8(12-AB)}{12 \times (8-AB)} = \frac{10}{3} \Leftrightarrow AB = 7$$

Ou seja, A e B distam 7Km.

Por causa da proposição anterior, podemos então definir

Definição 2.5.9 *Sejam \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} e \mathbf{d} quatro retas projetivas incidentes num ponto P e \mathbf{r} uma reta que não passa por P .*

*Definimos a **razão cruzada das retas** como $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = (A, B, C, D)$ onde*

$$A = \mathbf{a} \cap \mathbf{r}, B = \mathbf{b} \cap \mathbf{r}, C = \mathbf{c} \cap \mathbf{r} \text{ e } D = \mathbf{d} \cap \mathbf{r}$$

.

Proposição 2.5.10 *Sejam $\mathbf{l}_A, \mathbf{l}_B, \mathbf{l}_C$ e \mathbf{l}_D quatro retas projetivas incidentes num ponto O e sejam A, B, C e D os pontos duais de Plucker destas retas. Então,*

$$(\mathbf{l}_A, \mathbf{l}_B, \mathbf{l}_C, \mathbf{l}_D) = (A, B, C, D)$$

Demonstração:

Suponhamos que $A = [a]$, $B = [b]$, $C = [\alpha a + \beta b]$ e $D = [\gamma a + \delta b]$.

Então, por definição de razão cruzada, $(A, B, C, D) = \frac{\beta\gamma}{\alpha\delta}$ e, como A, B, C e D são duais de Plucker das retas, tem-se:

$$\mathbf{l}_A = [a_1 : a_2 : a_3]$$

$$\mathbf{l}_B = [b_1 : b_2 : b_3]$$

$$\mathbf{l}_C = [\alpha a_1 + \beta b_1 : \alpha a_2 + \beta b_2 : \alpha a_3 + \beta b_3]$$

$$\mathbf{l}_D = [\gamma a_1 + \delta b_1 : \gamma a_2 + \delta b_2 : \gamma a_3 + \delta b_3]$$

Por outras palavras, os planos vetoriais correspondentes às retas projetivas $\mathbf{l}_A, \mathbf{l}_B, \mathbf{l}_C$ e \mathbf{l}_D estão definidos, respetivamente, pelas equações:

$$a_1x + a_2y + a_3z = 0$$

$$b_1x + b_2y + b_3z = 0$$

$$(\alpha a_1 + \beta b_1)x + (\alpha a_2 + \beta b_2)y + (\alpha a_3 + \beta b_3)z = 0$$

$$(\gamma a_1 + \delta b_1)x + (\gamma a_2 + \delta b_2)y + (\gamma a_3 + \delta b_3)z = 0$$

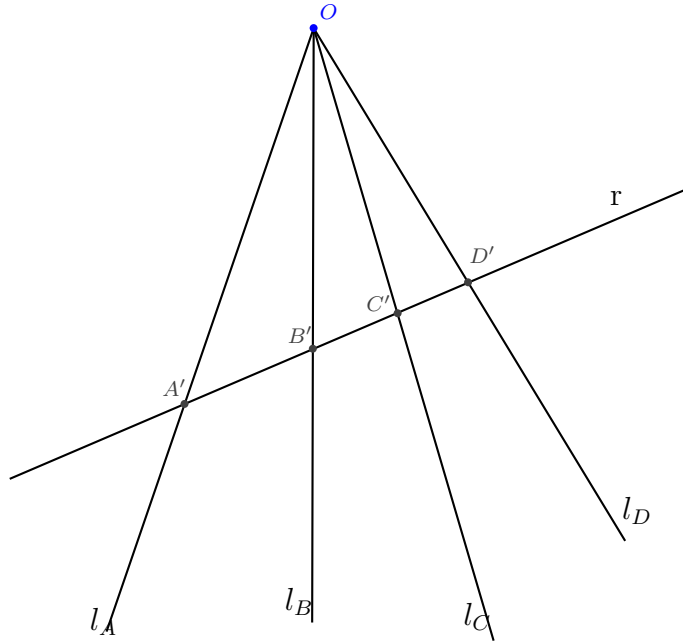


Fig. 2.31:

Sejam $A' = [a']$, $B' = [b']$, $C' = [c']$, $D' = [d']$ a interseção das retas projetivas com uma reta r , verificando

$$C' = [\alpha'a' + \beta'b']$$

$$D' = [\gamma'a' + \delta'b']$$

Por definição de razão cruzada de quatro retas, tem-se

$$(l_A, l_B, l_C, l_D) = \frac{\beta'\gamma'}{\alpha'\delta'}$$

Queremos provar que

$$\frac{\beta\gamma}{\alpha\delta} = \frac{\beta'\gamma'}{\alpha'\delta'}$$

Os pontos A' , B' , C' e D' pertencem às retas l_A , l_B , l_C e l_D , respetivamente, pelo que verificam as equações que as definem. Ou seja,

$$a_1a'_1 + a_2a'_2 + a_3a'_3 = 0$$

$$b_1b'_1 + b_2b'_2 + b_3b'_3 = 0$$

$$(\alpha a_1 + \beta b_1)(\alpha' a'_1 + \beta' b'_1) + (\alpha a_2 + \beta b_2)(\alpha' a'_2 + \beta' b'_2) + (\alpha a_3 + \beta b_3)(\alpha' a'_3 + \beta' b'_3) = 0$$

$$(\gamma a_1 + \delta b_1)(\gamma' a'_1 + \delta' b'_1) + (\gamma a_2 + \delta b_2)(\gamma' a'_2 + \delta' b'_2) + (\gamma a_3 + \delta b_3)(\gamma' a'_3 + \delta' b'_3) = 0$$

Como,

$$\alpha a_1 \alpha' a'_1 + \alpha a_2 \alpha' a'_2 + \alpha a_3 \alpha' a'_3 = \alpha \alpha' (a_1 a'_1 + a_2 a'_2 + a_3 a'_3) = 0$$

$$\beta b_1 \beta' b'_1 + \beta b_2 \beta' b'_2 + \beta b_3 \beta' b'_3 = \beta \beta' (b_1 b'_1 + b_2 b'_2 + b_3 b'_3) = 0$$

$$\gamma a_1 \gamma' a'_1 + \gamma a_2 \gamma' a'_2 + \gamma a_3 \gamma' a'_3 = \gamma \gamma' (a_1 a'_1 + a_2 a'_2 + a_3 a'_3) = 0$$

$$\delta b_1 \delta' b'_1 + \delta b_2 \delta' b'_2 + \delta b_3 \delta' b'_3 = \delta \delta' (b_1 b'_1 + b_2 b'_2 + b_3 b'_3) = 0$$

As duas últimas equações simplificam-se e obtemos:

$$\beta b_1 \alpha' a'_1 + \alpha a_1 \beta' b'_1 + \alpha a_2 \beta' b'_2 + \beta b_2 \alpha' a'_2 + \alpha a_3 \beta' b'_3 + \beta b_3 \alpha' a'_3 = 0$$

$$\beta \alpha' (b_1 a'_1 + b_2 a'_2 + b_3 a'_3) + \beta' \alpha (a_1 b'_1 + a_2 b'_2 + a_3 b'_3) = 0$$

e analogamente,

$$\delta \gamma' (b_1 a'_1 + b_2 a'_2 + b_3 a'_3) + \delta' \gamma (a_1 b'_1 + a_2 b'_2 + a_3 b'_3) = 0$$

Então,

$$\frac{\beta \alpha'}{\beta' \alpha} = -\frac{a_1 b'_1 + a_2 b'_2 + a_3 b'_3}{b_1 a'_1 + b_2 a'_2 + b_3 a'_3} = \frac{\delta \gamma'}{\delta' \gamma} \Leftrightarrow \frac{\beta \gamma}{\alpha \delta} = \frac{\beta' \gamma'}{\alpha' \delta'}$$

$(b_1 a'_1 + b_2 a'_2 + b_3 a'_3 \neq 0$ porque $A' \notin b$)

■

Corolário 2.5.11 *A dualidade de Plucker preserva a razão cruzada.*

Exemplo:

Consideremos as retas projetivas $\mathbf{p} : 2y + z = 0$; $\mathbf{q} : 2x + 2y + 3z = 0$; $\mathbf{r} : x + 2y + 2z = 0$ e $\mathbf{s} : -x + 6y + 2z = 0$ de coordenadas de Plucker $P \equiv [0 : 2 : 1]$; $Q \equiv [2 : 2 : 3]$; $R \equiv [1 : 2 : 2]$ e $S \equiv [-1 : 6 : 2]$ respetivamente.

$$(1, 2, 2) = \alpha (0, 2, 1) + \beta (2, 2, 3) \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{1}{2} \\ \alpha = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$(-1, 6, 2) = \gamma (0, 2, 1) + \delta (2, 2, 3) \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = \frac{7}{2} \\ \delta = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$(P, Q, R, S) = \frac{1/2}{1/2} / \frac{-1/2}{7/2} = -7$$

Determinemos agora a razão cruzada destas quatro retas, utilizando a definição e verifiquemos que o resultado é o mesmo.

Determinemos, em primeiro lugar, o ponto I de interseção destas quatro retas:

$$\begin{cases} 2y + z = 0 \\ 2x + 2y + 3z = 0 \\ x + 2y + 2z = 0 \\ -x + 6y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = -\frac{1}{2}z \end{cases}$$

$$I \equiv \left[-z : -\frac{1}{2}z : z \right] = [2 : 1 : -2]$$

Determinemos agora as interseções destas quatro retas com uma reta que não passe por I , por exemplo, a reta $l : z = 0$.

$l \cap p$:

$$\begin{cases} 2y + z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$P \equiv [x : 0 : 0] = [1 : 0 : 0]$$

$l \cap q$:

$$\begin{cases} 2x + 2y + 3z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = 0 \end{cases}$$

$$Q \equiv [x : -x : 0] = [1 : -1 : 0]$$

$l \cap r$:

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ z = 0 \end{cases}$$

$$R \equiv [-2y : y : 0] = [-2 : 1 : 0]$$

$l \cap s$:

$$\begin{cases} -x + 6y + 2z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6y \\ z = 0 \end{cases}$$

$$S \equiv [6y : y : 0] = [6 : 1 : 0]$$

Determinemos agora a razão destes quatro pontos:

$$(-2, 1, 0) = \alpha (1, 0, 0) + \beta (1, -1, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = -1 \end{cases}$$

$$(6, 1, 0) = \gamma (1, 0, 0) + \delta (1, -1, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 7 \\ \delta = -1 \end{cases}$$

$$(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{s}) = \frac{-1}{-1} / \frac{-1}{7} = -7$$

Como pudemos observar, o resultado é o mesmo.

Terminamos assim este segundo capítulo, mostrando algumas características da Geometria Projetiva. Todo este estudo sobre esta geometria terá aplicação no próximo capítulo sobre Cónicas Projetivas.

Capítulo 3

Cônicas Projetivas

3.1 Cônicas Projetivas

Como já tivemos oportunidade de ver no capítulo anterior, secção 2.1. e como se ilustra nas figuras 2.4, 2.5 e 2.6, uma cónica afim no plano fixo é uma elipse, uma parábola ou uma hipérbole se e só se corta a reta do infinito em 0, 1 ou 2 pontos, respetivamente. Verificaremos, de seguida, que o nosso modelo analítico vai de encontro à exemplificação geométrica feita anteriormente.

Concentremo-nos num único plano afim, $z = 1$ (plano fixo standard).

- Encontremos a equação da figura projetiva em \mathbb{P} que corresponde à elipse

$$\{(x, y, z) : b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2, z = 1\}$$

. Qualquer ponto $[x' : y' : z']$ com $z' \neq 0$ dessa figura encontra o plano $z = 1$ no ponto $\left(\frac{x'}{z'}, \frac{y'}{z'}, 1\right)$ da elipse, então

$$b^2 \left(\frac{x'}{z'}\right)^2 + a^2 \left(\frac{y'}{z'}\right)^2 = a^2b^2$$

Para $z' \neq 0$,

$$b^2 \left(\frac{x'}{z'}\right)^2 + a^2 \left(\frac{y'}{z'}\right)^2 = a^2b^2 \Leftrightarrow b^2x'^2 + a^2y'^2 = a^2b^2z'^2$$

Ou seja, a equação será

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2z^2$$

Tentemos incluir um ponto no infinito, ou seja, um ponto da forma $[x : y : 0]$.

Substituindo z por zero na equação anterior, temos que

$b^2x^2 + a^2y^2 = 0$, isto é, não existem pontos no infinito, uma vez que a equação é impossível.

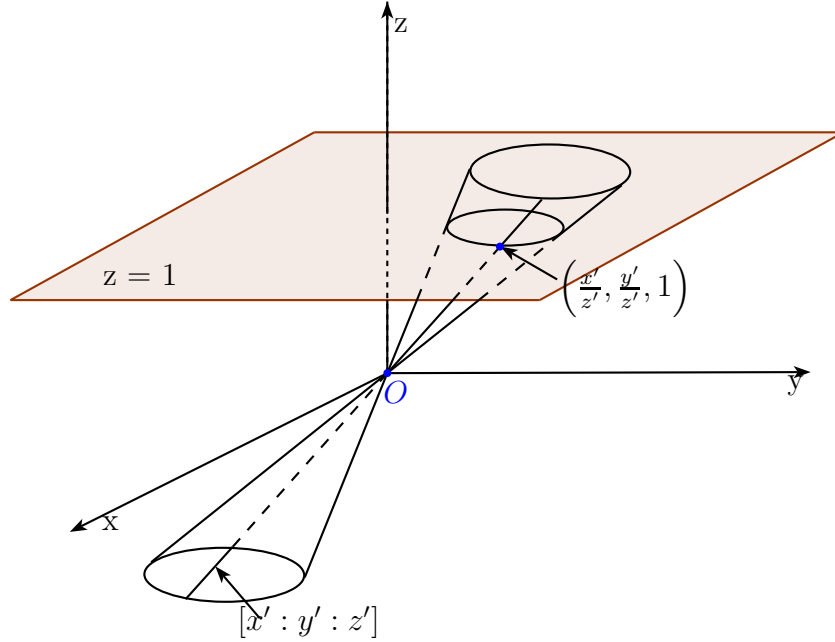


Fig. 3.1: Traço afim de uma cônica projetiva (elipse).

- Encontremos a equação da figura projetiva em \mathbb{P} que corresponde à parábola

$$\{(x, y, z) : y = ax^2, z = 1\}$$

.

Qualquer ponto $[x' : y' : z']$ com $z' \neq 0$ dessa figura encontra o plano $z = 1$ no ponto $\left(\frac{x'}{z'}, \frac{y'}{z'}, 1\right)$ da parábola, então

$$\frac{y'}{z'} = a \left(\frac{x'}{z'}\right)^2$$

Para $z' \neq 0$

$$\frac{y'}{z'} = a \left(\frac{x'}{z'}\right)^2 \Leftrightarrow y'z' = ax'^2$$

Ou seja, a equação será

$$ax^2 - yz = 0$$

Tentemos agora incluir um ponto no infinito, ou seja, um ponto da forma $[x : y : 0]$.

Substituindo z por zero na equação anterior, temos que $x^2 = 0$, isto é, $x = 0$.

Obtivemos então um ponto no infinito de coordenadas homogêneas $[0 : 1 : 0]$.

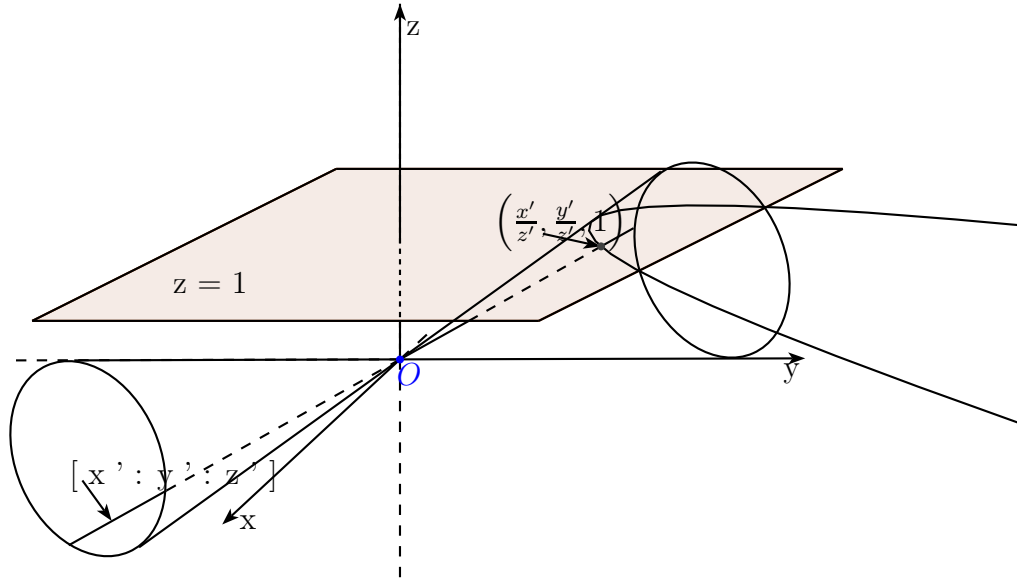


Fig. 3.2: Traço afim de uma cônica projetiva (parábola).

- Encontremos a equação da figura projetiva em \mathbb{P} que corresponde à hipérbole

$$\{(x, y, z) : b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2, z = 1\}$$

Qualquer ponto $[x' : y' : z']$ com $z' \neq 0$ dessa figura encontra o plano $z = 1$ no ponto $\left(\frac{x'}{z'}, \frac{y'}{z'}, 1\right)$ da hipérbole, então

$$b^2 \left(\frac{x'}{z'}\right)^2 - a^2 \left(\frac{y'}{z'}\right)^2 = a^2b^2$$

Para $z \neq 0$,

$$b^2 \left(\frac{x'}{z'}\right)^2 - a^2 \left(\frac{y'}{z'}\right)^2 = a^2b^2 \Leftrightarrow b^2x'^2 - a^2y'^2 = a^2b^2z'^2$$

Ou seja, a equação será

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2z^2$$

Tentemos incluir um ponto no infinito, ou seja, um ponto da forma $[x : y : 0]$.

Substituindo z por zero na equação anterior, temos

$$b^2x^2 - a^2y^2 = 0 \Leftrightarrow y = \pm \frac{b}{a}x$$

Obtivemos, desta forma, dois pontos no infinito, de coordenadas homogêneas $[x : \frac{b}{a}x : 0]$ e $[x : -\frac{b}{a}x : 0]$, ou seja, $[1 : k : 0]$ e $[1 : -k : 0]$.

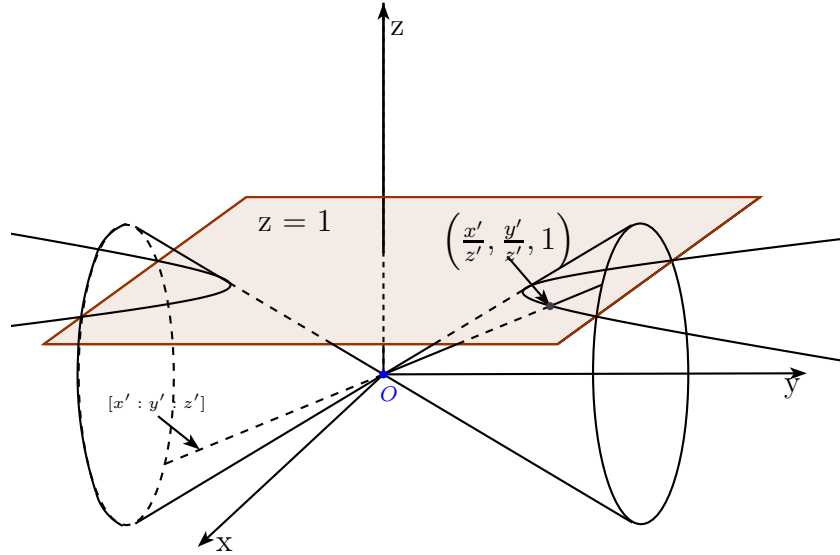


Fig. 3.3: Traço afim de uma cônica projetiva (hipérbole).

Se considerarmos o plano fixo standard, todos os pontos têm coordenadas homogêneas $[x : y : 1]$ e a reta infinita tem equação $z = 0$. Então um ponto $[x : y : 1]$ verifica a equação $\alpha x^2 + 2\gamma xy + \beta y^2 + 2\eta xz + 2\mu yz + \kappa z^2 = 0$, se e só se as suas coordenadas afins (x, y) verificam a equação $\alpha x^2 + 2\gamma xy + \beta y^2 + 2\eta x + 2\mu y + \kappa = 0$.

Definição 3.1.1 (Cônica no plano projetivo)

Seja $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ uma forma quadrática em \mathbb{R}^3 ,

$$F(x, y, z) = \alpha x^2 + 2\gamma xy + \beta y^2 + 2\eta xz + 2\mu yz + \kappa z^2$$

Chamamos **cônica de \mathbb{P}** associada a F , que denotamos por C_F , ao seguinte subconjunto de \mathbb{P} :

$$C_F = \{[x : y : z] \in \mathbb{P} : \alpha x^2 + 2\gamma xy + \beta y^2 + 2\eta xz + 2\mu yz + \kappa z^2 = 0\}$$

A matriz simétrica:

$$M_F = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma & \eta \\ \gamma & \beta & \mu \\ \eta & \mu & \kappa \end{pmatrix}$$

diz-se **matriz associada à cônica projetiva**.

Note-se que os pontos do infinito desta cônica são os pontos projetivos que verificam a condição $z = 0$.

Observe-se ainda que podemos expressar esta cônica na forma matricial como $X \cdot M_f \cdot X^T = 0$, onde $X = (x \ y \ z)$

Definição 3.1.2 *Uma cônica projetiva diz-se **não degenerada** se $\det M_F \neq 0$*

Exemplos:

No plano projetivo real:

1. A forma quadrática $F(x, y, z) = xy$ define a cônica:

$$C_F = \{[x : y : z] \in \mathbb{P} : xy = 0\}$$

cuja matriz associada é

$$M_F = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observe-se que $\det M_F = 0$, ou seja, é uma cônica projetiva degenerada.

O conjunto C_F é formado por duas retas projetivas \mathbf{r} e \mathbf{r}' cujas coordenadas de Plucker são $[1 : 0 : 0]$ e $[0 : 1 : 0]$ respetivamente.

2. A forma quadrática $F(x, y, z) = z^2$ define a cônica:

$$C_F = \{[x : y : z] \in \mathbb{P} : z^2 = 0\}$$

cuja matriz associada é:

$$M_F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Repare-se novamente, que $\det M_F = 0$

O conjunto C_F é formado pela reta projetiva cujas coordenadas de Plucker são $[0 : 0 : 1]$.

3. A forma quadrática $F(x, y, z) = y^2 + z^2$ define a cônica:

$$C_F = \{[x : y : z] \in \mathbb{P} : y^2 + z^2 = 0\}$$

cuja matriz associada é:

$$M_F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Também aqui, $\det M_F = 0$

A cônica C_F é o ponto $[1 : 0 : 0]$

4. A forma quadrática $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ define a cônica:

$$C_F = \{[x : y : z] \in \mathbb{P} : x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$$

cuja matriz associada é a matriz identidade. C_F é o conjunto vazio.

5. A forma quadrática $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ define uma cônica não vazia:

$$C_F = \{[x : y : z] \in \mathbb{P} : x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$$

cuja matriz associada é

$$M_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e $\det M_F = -1 \neq 0$.

Este conjunto C_F é uma cônica projetiva não degenerada não vazia.

6. A forma quadrática $F(x, y, z) = x^2 + 2xy + 3y^2 - yz + 2z^2$ define a cônica:

$$C_F = \{[x : y : z] \in \mathbb{P} : x^2 + 2xy + 3y^2 - yz + 2z^2 = 0\}$$

cuja matriz associada é:

$$M_F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

e $\det M_F = \frac{15}{4} \neq 0$.

Logo, é uma cônica projetiva não degenerada.

7. A cônica projetiva, $4x^2 - y^2 - 2xz + 3yz - 2z^2 = 0$, é uma cônica projetiva degenerada dado que,

$$\det M_F = \begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} & -2 \end{vmatrix} = 4 \times \frac{1}{4} - 0 - 1 \times 1 = 0$$

Nota: Classificação das cónicas projetivas reais

Na geometria afim, todas as elipses são afim-congruente e todas as hipérboles e parábolas também, isto é, existe sempre uma transformação afim que leva uma elipse noutra elipse qualquer, uma hipérbole noutra hipérbole e uma parábola noutra parábola, mas não existe nenhuma transformação afim que leve, por exemplo, uma elipse numa hipérbole ou numa parábola.

Adicionando 0, 1 ou 2 pontos do infinito, deixa de haver distinção entre elipses, parábolas e hipérboles. São simplesmente cónicas projetivas, isto é, e provaremos mais à frente, no nosso trabalho que, na geometria projetiva, **todas as cónicas não degeneradas são projetivo-congruentes**, ou seja, qualquer cónica projetiva pode ser transformada numa outra qualquer através de uma transformação projetiva. De facto, qualquer cónica pertence a um dos seguintes tipos:

$$x^2 = 0, \quad x^2 + y^2 = 0, \quad x^2 - y^2 = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

Efectivamente, como quaisquer duas cónicas projetivas não degeneradas são projetivo-congruentes, qualquer resultado envolvendo propriedades projetivas de colinearidade e concorrência que se verifique para uma cónica projetiva, verifica-se necessariamente para qualquer outra.

Por exemplo, como já referimos no capítulo anterior (secção 2.1), considerando uma circunferência, a sua projeção cónica pode ser uma elipse, uma hipérbole ou uma parábola, dependendo do plano fixo que escolhermos. Isto permite-nos afirmar, que todas as propriedades da circunferência que tenham carácter invariante relativamente às transformações projetivas, são propriedades das cónicas projetivas.

O método de redução de Gauss permite encontrar uma base de \mathbb{R}^3 tal que, se $v = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, uma forma quadrática $F(v)$ tenha uma das seguintes formas:

$$\bar{x}^2, \quad \bar{x}^2 + \bar{y}^2, \quad \bar{x}^2 - \bar{y}^2, \quad \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 \quad \text{ou} \quad \bar{x}^2 + \bar{y}^2 - \bar{z}^2$$

que representam respetivamente uma reta dupla ($x = 0$), um ponto ($[0 : 0 : 1]$), duas retas projetivas ($x + y = 0$ e $x - y = 0$), o conjunto vazio e o oval real.

Assim, o único caso não trivial é o último e existem cinco tipos de cónicas projetivas reais.

Não vamos demonstrar o Método de Gauss¹, mas verificaremos mais tarde, no teorema dos três pontos, que duas cónicas projetivas não degeneradas são projetivo-congruentes.

Teorema 3.1.3 *Seja t uma transformação projetiva e seja E uma cónica projetiva não degenerada.*

Então $t(E)$ é uma cónica projetiva não degenerada.

Demonstração:

Seja E uma cónica projetiva não degenerada de equação

$$\alpha x^2 + 2\gamma xy + \beta y^2 + 2\eta xz + 2\mu yz + \kappa z^2 = 0.$$

de matriz associada $M = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma & \eta \\ \gamma & \beta & \mu \\ \eta & \mu & \kappa \end{pmatrix}$, ou seja, um ponto projetivo $[x : y : z]$ pertence à cónica se e só se

$$(x \ y \ z) \begin{pmatrix} \alpha & \gamma & \eta \\ \gamma & \beta & \mu \\ \eta & \mu & \kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Seja $[x' : y' : z']$ a imagem de qualquer ponto de E sob a transformação t com matriz associada A .

$$\text{Então } [x : y : z] = t^{-1}([x' : y' : z']), \text{ ou seja, } (x \ y \ z) = A^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Substituindo na equação matricial da cónica projetiva, temos:

$$(x' \ y' \ z') (A^{-1})^T M A^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = 0$$

o que significa que a imagem de E através de t é a cónica associada à matriz $(A^{-1})^T M A^{-1}$

Como $\det((A^{-1})^T M A^{-1}) \neq 0$, a cónica projetiva é não degenerada.

■

Lema 3.1.4 *Pelos pontos projetivos $[1 : 0 : 0]$, $[0 : 1 : 0]$, $[0 : 0 : 1]$, $[1 : 1 : 1]$ e $[a : b : c]$, entre os quais não existem três pontos colineares, passa uma única cónica projetiva não degenerada de equação*

$$c(a - b)xy + b(c - a)xz + a(b - c)yz = 0$$

¹Podemos ver o Teorema de Gauss em “Géométrie”, M Berger, Ed. Nathan, 1990 (propriedade 13.4.8)

Demonstração:

Se $a = 0$, então $[0 : 1 : 0]$, $[0 : 0 : 1]$ e $[a : b : c]$ são colineares (incidem na reta $x = 0$), o que contraria uma condição do lema, pelo que, podemos concluir que $a \neq 0$.

Do mesmo modo, chegaríamos à conclusão que $b \neq 0$ e $c \neq 0$.

Se $a = b$, então os pontos $[0 : 0 : 1]$, $[1 : 1 : 1]$ e $[a : b : c]$ são colineares (incidem na reta $x = y$), o que também contraria a mesma condição, pelo que, podemos afirmar que $a \neq b$.

Do mesmo modo, concluimos que $b \neq c$ e $a \neq c$.

Ou seja, a , b e c são todos diferentes e não nulos.

Suponhamos que existe uma cónica projetiva:

$$\alpha x^2 + 2\gamma xy + \beta y^2 + 2\eta xz + 2\mu yz + kz^2 = 0$$

que passa pelos pontos $[1 : 0 : 0]$, $[0 : 1 : 0]$, $[0 : 0 : 1]$, $[1 : 1 : 1]$ e $[a : b : c]$

Então

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ k = 0 \\ \alpha + 2\gamma + \beta + 2\eta + 2\mu + k = 0 \\ \alpha a^2 + 2\gamma ab + \beta b^2 + 2\eta ac + 2\mu bc + kc^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ k = 0 \\ \gamma + \eta + \mu = 0 \\ \gamma ab + \eta ac + \mu bc = 0 \end{cases}$$

Multiplicando a quarta equação por $-ab$ e adicionando a quinta, vem:

$$\eta = -\mu \frac{bc - ab}{ac - ab}$$

Multiplicando agora a quarta equação por $-ac$ e adicionando a quinta, temos:

$$\gamma = -\mu \frac{bc - ac}{ab - ac}$$

Substituindo agora na equação da cónica, temos que:

$$\begin{aligned} 0 \cdot x^2 + 2 \left(-\mu \frac{bc - ac}{ab - ac} \right) xy + 0 \cdot y^2 + 2 \left(-\mu \frac{bc - ab}{ac - ab} \right) xz + 2\mu yz + 0 \cdot z^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow c(a - b)xy + b(c - a)xz + a(b - c)yz &= 0 \end{aligned}$$

Trata-se efectivamente de uma cónica projetiva não degenerada que passa pelos pontos indicados.



Acabamos de demonstrar que existe uma única cônica projetiva que passa por cinco pontos sendo quatro dos quais os pontos do quadrângulo de referência. O teorema que se segue mostra que existe uma única cônica projetiva não degenerada que passa por cinco quaisquer pontos projetivos, entre os quais não existem três colineares.

Teorema 3.1.5 Teorema dos cinco pontos

Por um conjunto de cinco pontos projetivos, entre os quais não existem três pontos colineares, passa uma única cônica projetiva não degenerada.

Demonstração:

Consideremos cinco pontos projetivos, dos quais não existem três colineares.

Pelo teorema fundamental da geometria projetiva, existe uma transformação projetiva, t , que leva quatro desses cinco pontos no quadrângulo de referência, $[1 : 0 : 0]$, $[0 : 1 : 0]$, $[0 : 0 : 1]$ e $[1 : 1 : 1]$. Seja $[a : b : c]$ a imagem através de t do quinto ponto.

Uma vez que a colinearidade é uma propriedade projetiva, podemos concluir que não existem três destes pontos que sejam colineares e, pelo lema anterior, por estes cinco pontos passa uma única cônica projetiva. A imagem recíproca através de t dessa cônica passa pelos cinco pontos originais.

■

Exemplo:

Determinemos a equação da cônica projetiva que passa nos pontos $[1 : 0 : 1]$, $[-2 : 1 : 1]$, $[0 : 1 : 2]$, $[1 : 1 : 2]$ e $[2 : 3 : 1]$

Como já vimos num exemplo apresentado no capítulo anterior, existe uma transformação projetiva que leva os primeiros quatro pontos no quadrângulo de referência, cuja matriz associada é $\begin{pmatrix} -2 & -8 & 4 \\ -2 & -4 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Esta transformação projetiva leva o ponto projetivo $[2 : 3 : 1]$ ao ponto projetivo $[12 : 7 : 5]$, uma vez que:

$$\begin{pmatrix} -2 & -8 & 4 \\ -2 & -4 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ -14 \\ -10 \end{pmatrix}$$

Substituindo a , b e c na equação do teorema anterior por 12, 7 e 5 respetivamente, obtemos a equação da cônica projetiva que passa pelo quadrilátero de referência e pelo ponto $[12 : 7 : 5]$:

$$5(12 - 7)xy + 7(5 - 12)xz + 12(7 - 5)yz = 0 \Leftrightarrow 25xy - 49xz + 24yz = 0$$

Determinemos então a equação da cônica que passa pelos cinco pontos originais.

$$\begin{pmatrix} -2 & -8 & 4 \\ -2 & -4 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2x' - 8y' + 4z' \\ y = -2x' - 4y' + 2z' \\ z = -x' - 3y' + z' \end{cases}$$

Substituindo x , y e z na equação da cônica obtida, temos que:

$$\begin{aligned} & 25(-2x' - 8y' + 4z')(-2x' - 4y' + 2z') - 49(-2x' - 8y' + 4z')(-x' - 3y' + z') \\ & + 24(-2x' - 4y' + 2z')(-x' - 3y' + z') = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 25x'^2 + 77x'y' - 44y'^2 - 51x'z' - 30y'z' + 26z'^2 = 0$$

Concluimos então que a equação da cônica que passa pelos pontos $[1 : 0 : 1]$, $[-2 : 1 : 1]$, $[0 : 1 : 2]$, $[1 : 1 : 2]$ e $[2 : 3 : 1]$ é:

$$25x^2 + 77xy - 44y^2 - 51xz - 30yz + 26z^2 = 0$$

Como pudemos observar, existe apenas uma cônica projetiva não degenerada que passa por um conjunto de cinco pontos, entre os quais não existem três colineares.

Proposição 3.1.6 *O traço afim de uma cônica projetiva não degenerada é uma cônica afim não degenerada.*

Qualquer teorema que envolva exclusivamente propriedades projetivas de pontos, retas e cônicas projetivas, pode ser interpretado como um teorema sobre correspondentes pontos, retas e cônicas num plano fixo.

Sendo assim, se conseguirmos provar um determinado teorema que envolva apenas propriedades projetivas, podemos assumir que esse teorema também é válido em \mathbb{R}^2 . Deste modo, enunciaremos o seguinte corolário:

Corolário 3.1.7 *Por um conjunto de cinco pontos pertencentes ao mesmo plano afim, dos quais não existem três colineares, passa uma única cônica plana não degenerada.*

É interessante verificar que apenas quatro pontos não são suficientes para definir uma cônica.

Observemos a seguinte figura.

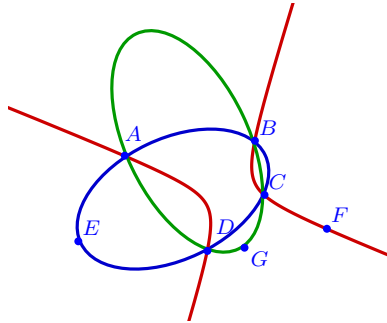


Fig. 3.4: Representação de algumas cônicas que passam por um conjunto de quatro pontos.

Como se pode observar, pelos pontos A, B, C e D conseguimos traçar três cônicas distintas e poderíamos traçar muitas mais.

Enunciemos então a seguinte proposição:

Proposição 3.1.8 *Por um conjunto de quatro pontos distintos, dos quais não existem três colineares, passam infinitas cônicas projetivas não degeneradas.*

Demonstração:

Consideremos quatro pontos projetivos.

Pelo Teorema Fundamental da Geometria Projetiva, existe uma transformação projetiva que leva esses quatro pontos no quadrângulo de referência.

Consideremos um quinto ponto projetivo da forma $[1 : 2 : \lambda]$, com $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 1$ e $\lambda \neq 2$, uma vez que, como vimos no lema enunciado anteriormente, as coordenadas deste quinto ponto têm que ser todas diferentes e não nulas.

Então, existe uma única cônica projetiva C_λ que passa nestes cinco pontos de equação

$$\lambda(1 - 2)xy + 2(\lambda - 1)xz + 1(2 - \lambda)yz = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\lambda xy + 2(\lambda - 1)xz + (2 - \lambda)yz = 0$$

Obtemos assim várias cónicas projetivas todas diferentes e dependentes do valor de λ .

Efectivamente, se $\lambda \neq \mu$, então o ponto $[1 : 2 : \mu]$ não pertence à cónica C_λ e portanto, $C_\lambda \neq C_\mu$

A imagem recíproca destas cónicas será um conjunto infinito de cónicas que passam pelos quatro pontos iniciais.

■

Exemplo:

Consideremos os quatro primeiro pontos do exemplo anterior e determinemos duas cónicas que passam pelos quatro pontos iniciais.

Seja $[1 : 1 : 1]$ um quinto ponto e determinemos a cónica que passa nos cinco pontos, ou seja, nos pontos $[1 : 0 : 1]$, $[-2 : 1 : 1]$, $[0 : 1 : 2]$, $[1 : 1 : 2]$ e $[1 : 1 : 1]$.

A transformação projetiva que leva os primeiros quatro pontos no quadrilátero de referência, transforma o ponto $[1 : 1 : 1]$ no ponto $[6 : 4 : 3]$, uma vez que:

$$\begin{pmatrix} -2 & -8 & 4 \\ -2 & -4 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Substituindo a , b e c por 6, 4 e 3 respetivamente, na equação do lema enunciado anteriormente, temos,

$$3(6 - 4)xy + 4(3 - 6)xz + 6(4 - 3)yz = 0 \Leftrightarrow xy - 2xz + yz = 0$$

Ou seja, $xy - 2xz + yz = 0$ é a equação da cónica que passa no quadrângulo de referência e no ponto $[6 : 4 : 3]$.

Determinemos agora a equação da cónica que passa pelos cinco pontos originais.

$$\begin{pmatrix} -2 & -8 & 4 \\ -2 & -4 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2x' - 8y' + 4z' \\ y = -2x' - 4y' + 2z' \\ z = -x' - 3y' + z' \end{cases}$$

Substituindo x , y e z na equação da cónica anterior, temos que:

$$\begin{aligned} & (-2x' - 8y' + 4z')(-2x' - 4y' + 2z') - 2(-2x' - 8y' + 4z')(-x' - 3y' + z') + \\ & + (-2x' - 4y' + 2z')(-x' - 3y' + z') = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x'^2 + 3x'y' - 2y'^2 - 2x'z' - y'z' + z'^2 = 0$$

A equação da cónica projetiva que passa por esses cinco pontos é:

$$x^2 + 3xy - 2y^2 - 2xz - yz + z^2 = 0$$

Ou seja, as cónicas projetivas de equações

$$25x^2 + 77xy - 44y^2 - 51xz - 30yz + 26z^2 = 0$$

e

$$x^2 + 3xy - 2y^2 - 2xz - yz + z^2 = 0$$

passam pelos pontos $[1 : 0 : 1]$, $[-2 : 1 : 1]$, $[0 : 1 : 2]$ e $[1 : 1 : 2]$.

Muitas outras cónicas projetivas conseguiríamos descobrir que passassem nestes quatro pontos. Efectivamente existem infinitas. Para qualquer ponto projetivo encontraremos uma cónica que passa nos quatro pontos.

Definição 3.1.9 *Sejam A, B, C e D quatro pontos do plano projetivo. Chamamos **feixe de cónicas** ao conjunto de todas as cónicas que passam pelos pontos A, B, C e D .*

Até agora provamos que existe uma transformação projetiva que leva um quadrângulo projetivo qualquer noutro quadrângulo projetivo e também uma transformação projetiva que transforma uma cónica projetiva não degenerada noutra. Provaremos de seguida que dadas duas cónicas projetivas não degeneradas, existe uma transformação projetiva que transforma uma na outra e três pontos de uma em três pontos da outra. Em particular, duas cónicas projetivas não degeneradas são projetivo-congruentes.

Lema 3.1.10 ***Forma standard** $xy + yz + zx = 0$*

Seja E uma cónica projetiva não degenerada que passa pelos pontos P, Q, R . Existe uma transformação projetiva t que transforma E na cónica projetiva de equação $xy + yz + zx = 0$ de tal modo que $t(P) = [1 : 0 : 0]$, $t(Q) = [0 : 1 : 0]$ e $t(R) = [0 : 0 : 1]$.

Demonstração:

Seja t' uma transformação projetiva que leva P , Q e R no triângulo de referência, ou seja, transforma P , Q e R em $[1 : 0 : 0]$, $[0 : 1 : 0]$ e $[0 : 0 : 1]$, respetivamente.

Então t' transforma E numa cónica projetiva E' não degenerada que passa no triângulo de referência.

Sendo E' uma cónica projetiva, a sua equação será da forma:

$$\alpha x^2 + 2\gamma xy + \beta y^2 + 2\eta xz + 2\mu yz + kz^2 = 0$$

Como esta cónica passa nos pontos $[1 : 0 : 0]$, $[0 : 1 : 0]$ e $[0 : 0 : 1]$, temos que

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ k = 0 \end{cases}$$

Ou seja, podemos re-escrever a equação de E' da seguinte forma:

$$2\gamma xy + 2\eta xz + 2\mu yz = 0 \Leftrightarrow \gamma xy + \eta xz + \mu yz = 0$$

γ , η e μ são todos não nulos, uma vez que, se por exemplo, $\gamma = 0$, então a equação da cónica seria

$$\eta xz + \mu yz = 0 \Leftrightarrow (\beta x + \mu y) z = 0$$

que é uma cónica projetiva degenerada, e o mesmo se verificaria se $\eta = 0$ ou $\mu = 0$.

Deste modo, uma vez que γ , η e μ são não nulos, podemos dividir todos os termos da equação por $\gamma\eta\mu$:

$$\frac{\gamma xy}{\gamma\eta\mu} + \frac{\eta xz}{\gamma\eta\mu} + \frac{\mu yz}{\gamma\eta\mu} = 0 \Leftrightarrow \frac{xy}{\eta\mu} + \frac{xz}{\gamma\mu} + \frac{yz}{\gamma\eta} = 0$$

Seja t'' uma transformação projetiva tal que $t''([x : y : z]) = [x' : y' : z']$ de matriz associada:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\eta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix}$$

Então,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\eta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{\mu}x \\ y' = \frac{1}{\eta}y \\ z' = \frac{1}{\gamma}z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \mu x' \\ y = \eta y' \\ z = \gamma z' \end{cases}$$

Substituindo x , y e z na equação anterior, temos que:

$$\frac{\mu x' \eta y'}{\eta\mu} + \frac{\mu x' \gamma z'}{\gamma\mu} + \frac{\eta y' \gamma z'}{\gamma\eta} = 0 \Leftrightarrow x'y' + x'z' + y'z' = 0$$

Uma vez que t'' deixa invariantes os pontos do triângulo de referência, a composta das transformações projetivas t'' e t' , isto é, $t_1 = t'' \circ t'$, transforma E na cônica projetiva de equação $xy + xz + yz = 0$ de tal modo que $t_1(P) = [1 : 0 : 0]$, $t_1(Q) = [0 : 1 : 0]$ e $t_1(R) = [0 : 0 : 1]$. ■

Teorema 3.1.11 Teorema dos três pontos.

Sejam E_1 e E_2 cônicas projetivas não degeneradas que passam pelos pontos P_1, Q_1, R_1 e P_2, Q_2, R_2 , respectivamente.

Existe uma transformação projetiva t que transforma E_1 em E_2 e tal que:

$$t(P_1) = P_2, \quad t(Q_1) = Q_2 \text{ e } t(R_1) = R_2$$

Em particular, duas cônicas projetivas não degeneradas são projetivo-congruentes

Demonstração:

Pelo lema anterior, existe uma transformação projetiva t_1 que transforma E_1 na cônica projetiva de equação $xy + yz + zx = 0$ de modo que $t_1(P_1) = [1 : 0 : 0]$, $t_1(Q_1) = [0 : 1 : 0]$ e $t_1(R_1) = [0 : 0 : 1]$.

Do mesmo modo, existe uma transformação projetiva t_2 que transforma E_2 na cônica projetiva de equação $xy + xz + yz = 0$ e de modo que $t_2(P_2) = [1 : 0 : 0]$, $t_2(Q_2) = [0 : 1 : 0]$ e $t_2(R_2) = [0 : 0 : 1]$.

Então, a transformação projetiva $t = t_2^{-1} \circ t_1$ transforma E_1 em E_2 , de tal modo que $t(P_1) = P_2$, $t(Q_1) = Q_2$ e $t(R_1) = R_2$. ■

Acabamos de provar que todas as cônicas projetivas são projetivo-congruentes e em particular, que existe uma transformação projetiva que transforma qualquer cônica projetiva não degenerada em \mathbb{P} na cônica projetiva de equação $xy + yz + zx = 0$

Este resultado ser-nos-à muito útil no nosso estudo. Simplificaremos problemas sobre cônicas projetivas transformando-as na cônica projetiva de equação $xy + xz + yz = 0$, que, pela sua simplicidade e pelo facto de passar pelos pontos do triângulo de referência, nos permitirá simplificar os cálculos.

3.2 O Teorema de Pascal

Blaise Pascal (1623-1662), com apenas dezasseis anos de idade, demonstrou um importante teorema sobre cónicas no plano, que se enuncia da seguinte forma: *”Sejam A, B, C, A', B' e C' seis pontos distintos de uma cónica plana não degenerada. Sejam P, Q e R os pontos de interseção de BC' e $B'C$, de CA' e $C'A$ e de AB' e $A'B$ respetivamente. Então P, Q e R são colineares.”*

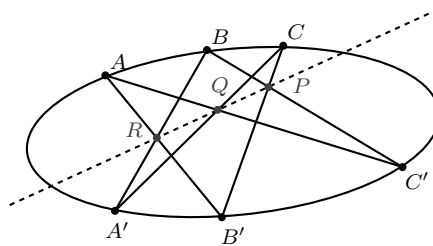


Fig. 3.5: Hexagrama místico.

No seu tratado sobre cónicas, em 1648, Pascal chamou a esta figura ”hexagrama místico”. Este tratado perdeu-se e apenas conhecemos dele a referência que Leibniz faz numa carta a Périer. Relativamente a este teorema Leibniz escreveu que Pascal, por meio de projeções provou que todos os ”hexagramas místicos” estão inscritos numa cónica e que toda a secção cónica tem um ”hexagrama místico”. Joseph Bertrand diz, a propósito deste teorema, que desta propriedade universal se podem tirar quatrocentos corolários.

O que faremos de seguida é enunciar e demonstrar a versão projetiva do Teorema de Pascal.

Antes de enunciar e demonstrar este teorema, necessitamos de introduzir o “Teorema da Parametrização” que nos facilitará mais tarde a demonstração do “Teorema de Pascal”.

Teorema 3.2.1 Teorema da parametrização.

Seja E uma cónica projetiva de equação na forma standard

$$xy + yz + zx = 0$$

Então, cada ponto de E , diferente de $[1 : 0 : 0]$, tem coordenadas homogéneas da forma $[t^2 + t : t + 1 : -t]$, com $t \in \mathbb{R}$, e cada ponto desta forma pertence a E .

Demonstração:

Seja $[x : y : z]$ um ponto qualquer em E .

- Se $x = 0$, então

$$yz = 0 \Leftrightarrow y = 0 \vee z = 0$$

- Se $x = 0 \wedge y = 0$, o ponto tem coordenadas homogêneas $[0 : 0 : z] = [0 : 0 : 1]$.
- Se $x = 0 \wedge z = 0$, o ponto tem coordenadas homogêneas $[0 : y : 0] = [0 : 1 : 0]$.

- Se $y = 0$, então

$$zx = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee z = 0$$

- Se $y = 0 \wedge z = 0$, o ponto tem coordenadas homogêneas $[x : 0 : 0] = [1 : 0 : 0]$.
- Se $y = 0 \wedge x = 0$, o ponto tem coordenadas homogêneas $[0 : 0 : z] = [0 : 0 : 1]$.

- Se $z = 0$, então

$$xy = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee y = 0$$

- Se $z = 0 \wedge x = 0$, o ponto tem coordenadas homogêneas $[0 : y : 0] = [0 : 1 : 0]$.
- Se $z = 0 \wedge y = 0$, o ponto tem coordenadas homogêneas $[x : 0 : 0] = [1 : 0 : 0]$.

Seja, agora, $[x : y : z]$ um ponto de E em que x , y e z são todos não nulos e seja $t = \frac{x}{y}$.

Então $x = ty$.

Substituindo na equação da cônica, temos

$$tyy + yz + zty = 0 \Leftrightarrow ty^2 + (1 + t)yz = 0$$

Como $y \neq 0$,

$$ty + (1 + t)z = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{t+1}{t}z$$

Isto significa que:

$$x = t \left[-\frac{t+1}{t}z \right] = -(t+1)z$$

O ponto $[x : y : z]$ tem coordenadas homogêneas

$$\left[-(t+1)z : -\frac{(t+1)}{t}z : z \right]$$

Como $z \neq 0$ e $t \neq 0$, podemos escrever que

$$[x : y : z] = [t^2 + t : t + 1 : -t]$$

Na expressão anterior, fazendo $t = -1$, obtemos o ponto $[0 : 0 : 1]$ e fazendo $t = 0$, obtemos o ponto $[0 : 1 : 0]$.

Ou seja, qualquer ponto de E diferente de $[1 : 0 : 0]$ tem coordenadas homogêneas da forma $[t^2 + t : t + 1 : -t]$, com $t \in \mathbb{R}$.

Como confirmaremos de seguida, qualquer ponto desta forma pertence a E .

$$(t^2 + t)(t + 1) + (t + 1)(-t) + (-t)(t^2 + t) = t^3 + t^2 + t^2 + t - t^2 - t - t^3 - t^2 = 0$$

■

Teorema 3.2.2 Teorema de Pascal.

Sejam A, B, C, A', B' e C' seis pontos distintos de uma cônica projetiva não degenerada. Sejam P, Q e R os pontos de interseção de BC' e $B'C$, de CA' e $C'A$ e de AB' e $A'B$ respetivamente. Então P, Q e R são colineares

Demonstração:

Como as transformações projetivas preservam a colinearidade e a incidência, usando o lema 3.1.10, basta provar este resultado para a cônica na forma standard $xy + yz + zx = 0$, sendo A, B e C os pontos do triângulo de referência, ou seja,

$$A \equiv [1 : 0 : 0], B \equiv [0 : 1 : 0] \text{ e } C \equiv [0 : 0 : 1].$$

Pelo teorema da parametrização, sejam, $A' \equiv [a^2 + a : a + 1 : -a]$, $B' \equiv [b^2 + b : b + 1 : -b]$ e $C' \equiv [c^2 + c : c + 1 : -c]$, com a, b e c números reais não nulos, uma vez que, se a, b ou c fossem nulos, seriam iguais ao ponto B e os seis pontos têm que ser distintos.

A reta BC' tem equação:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ c^2 + c & c + 1 & -c \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -cx - (c^2 + c)z = 0 \Leftrightarrow x = -(c + 1)z$$

e a reta $B'C$ tem como equação:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ b^2 + b & b + 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (b + 1)x - (b^2 + b)y = 0 \Leftrightarrow (b + 1)(x - by) = 0 \Leftrightarrow x = by,$$

uma vez que $b \neq -1$ porque de outro modo, seria o ponto C e os seis pontos têm que ser distintos.

Sendo P o ponto de interseção de BC' e $B'C$, pertence às duas retas, ou seja, satisfaz as duas equações.

$$\begin{cases} x = -(c + 1)z \\ x = by \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -\frac{1}{c+1}x \\ y = \frac{1}{b}x \end{cases}$$

$$P = \left[x : \frac{1}{b}x : -\frac{1}{c+1}x \right] = [b(c+1) : c+1 : -b]$$

A reta CA' tem como equação:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ a^2+a & a+1 & -a \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -(a+1)x + (a^2+a)y = 0 \Leftrightarrow (a+1)(-x+ay) = 0 \Leftrightarrow x = ay,$$

uma vez que $a \neq -1$ pela mesma razão que $b \neq -1$ na observação anterior.

A reta C'A tem equação:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ c^2+c & c+1 & -c \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -cy - (c+1)z = 0 \Leftrightarrow cy = -(c+1)z,$$

Sendo Q o ponto de interseção das retas CA' e C'A, verifica as duas equações:

$$\begin{cases} x = ay \\ cy = -(c+1)z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = ay \\ z = -\frac{c}{c+1}y \end{cases}$$

$$Q = \left[ay : y : -\frac{c}{c+1}y \right] = [a(c+1) : c+1 : -c].$$

A reta AB' tem como equação:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ b^2+b & b+1 & -b \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow by + (b+1)z = 0 \Leftrightarrow by = -(b+1)z,$$

e a reta A'B tem equação:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a^2+a & a+1 & -a \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow ax + (a^2+a)z = 0 \Leftrightarrow x = -(a+1)z,$$

O ponto R é o ponto de interseção destas duas retas, ou seja, verifica as duas equações:

$$\begin{cases} by = -(b+1)z \\ x = -(a+1)z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{b+1}{b}z \\ z = -(a+1)z \end{cases}$$

$$R = \left[-(a+1)z : -\frac{b+1}{b}z : z \right] = [b(a+1) : b+1 : -b].$$

Verifiquemos agora que P, Q e R são colineares:

$$\begin{vmatrix} b(c+1) & c+1 & -b \\ a(c+1) & c+1 & -c \\ b(a+1) & b+1 & -b \end{vmatrix} =$$

$$= b(c+1)[-b(c+1) + c(b+1)] + (c+1)[-bc(a+1) + ab(c+1)]$$

$$\begin{aligned}
& -b[a(c+1)(b+1) - b(a+1)(c+1)] = \\
& = b(c+1)(-bc - b + bc + c) + (c+1)(-abc - bc + abc + ab) - b(c+1)(ab + a - ab - b) = \\
& = b(c+1)(-b + c + a - c - a + b) = 0
\end{aligned}$$

■

Exemplo:

Seja E a cônica projetiva não degenerada de equação

$$2x^2 + 3xy + 4y^2 + 2xz - 6yz + 2z^2 = 0$$

Sejam $A \equiv [0 : 1 : 2]$, $B \equiv [0 : 1 : 1]$, $C \equiv [-4 : 1 : 3]$, $A' \equiv [-1 : 2 : 1]$, $B' \equiv [-3 : 2 : 8]$ e $C' \equiv [-4 : 1 : 4]$ seis pontos distintos pertencentes a E .

BC' tem equação:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3x - 4y + 4z = 0$$

$B'C$ tem como equação:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ -3 & 2 & 8 \\ -4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -2x - 23y + 5z = 0$$

$BC' \cap B'C$:

$$\begin{cases} 3x - 4y + 4z = 0 \\ -2x - 23y + 5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{77}{23}y \\ x = -\frac{72}{23}y \end{cases}$$

O ponto P de interseção destas duas retas tem coordenadas homogêneas $[-\frac{72}{23}y : y : \frac{77}{23}y]$.

Ou seja, $P \equiv [-72 : 23 : 77]$

CA' tem equação:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ -4 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -5x + y - 7z = 0$$

$C'A$ tem como equação:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ -4 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - 4y + 2z = 0$$

$CA' \cap C'A$:

$$\begin{cases} -5x + y - 7z = 0 \\ x - 4y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{19}z \\ x = -\frac{26}{19}z \end{cases}$$

O ponto Q de interseção destas duas retas tem coordenadas homogêneas $[-\frac{26}{19}z : \frac{3}{19}z : z]$.

Ou seja, $Q \equiv [-26 : 3 : 19]$

AB' tem equação:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4x - 6y + 3z = 0$$

$A'B$ tem como equação:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + y - z = 0$$

$AB' \cap A'B$:

$$\begin{cases} 4x - 6y + 3z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{7}{3}x \\ z = \frac{10}{3}x \end{cases}$$

O ponto R de interseção destas duas retas tem coordenadas homogêneas $[x : \frac{7}{3}x : \frac{10}{3}x]$.

Ou seja, $R \equiv [3 : 7 : 10]$

Verifiquemos agora que P , Q e R são colineares:

$$\begin{vmatrix} -72 & 23 & 77 \\ -26 & 3 & 19 \\ 3 & 7 & 10 \end{vmatrix} = 0$$

Logo, P , Q e R são colineares.

Como já foi referido anteriormente, qualquer teorema demonstrado no plano projetivo que envolva apenas propriedades projetivas, é válido também no plano afim, basta considerar a sua configuração num plano fixo.

Deste modo, o Teorema de Pascal dá lugar a três resultados no plano afim, que passaremos a estudar:

Corolário 3.2.3 :

Sejam A , B , C , A' , B' e C' seis pontos distintos de uma cónica não degenerada em \mathbb{R}^2 . Sejam P , Q e R os pontos de interseção de BC' e $B'C$, de CA' e $C'A$ e de AB' e $A'B$, respetivamente.

Então P , Q e R são colineares.

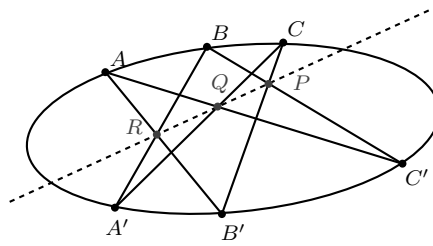


Fig. 3.6: Representação do Teorema de Pascal no plano afim.

Corolário 3.2.4 *Sejam A, B, C, A', B' e C' seis pontos distintos de uma cônica não degenerada em \mathbb{R}^2 .*

Sejam P e Q os pontos de interseção de BC' e $B'C$ e de CA' e $C'A$ respectivamente e AB' e $A'B$ retas paralelas.

Então PQ é paralela a AB' e a $A'B$.

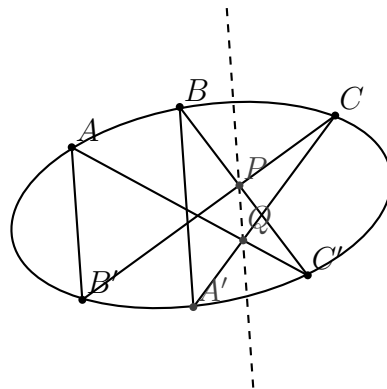


Fig. 3.7: Representação do Teorema de Pascal no plano afim. Caso em que AB' é paralela a $A'B$

Corolário 3.2.5 *Sejam A, B, C, A', B' e C' seis pontos distintos de uma cônica não degenerada em \mathbb{R}^2 .*

Se as retas BC' e $B'C$ e as retas AB' e $A'B$ são paralelas, então as retas AC' e $A'C$ também são.

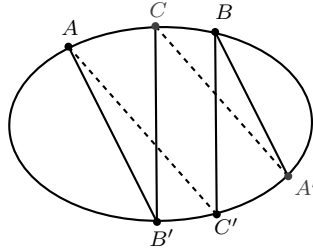


Fig. 3.8: Representação do Teorema de Pascal no plano afim. Caso em $BC' // B'C$ e $AB' // A'B$.

O recíproco do teorema de Pascal também é verdadeiro, como enunciaremos de seguida.

Teorema 3.2.6 Recíproco do Teorema de Pascal.

Sejam A, B, C, A', B' e C' seis pontos projetivos dos quais não existem três colineares e sejam P, Q e R os pontos de interseção de BC' e $B'C$, de CA' e $C'A$ e de AB' e $A'B$ respetivamente.

Se P, Q e R são colineares, então os pontos A, B, C, A', B' e C' pertencem a uma cônica projetiva não degenerada.

Por outras palavras, todo o hexagrama místico está inscrito numa cônica.

Demonstração:

Uma vez que não existem três pontos colineares neste conjunto de seis pontos, podemos assumir, usando o Teorema Fundamental da Geometria Projetiva que $A = [1 : 0 : 0]$, $B = [0 : 1 : 0]$, $C = [0 : 0 : 1]$ e $A' = [1 : 1 : 1]$.

Sejam $[b_1 : b_2 : b_3]$ e $[c_1 : c_2 : c_3]$ as coordenadas de B' e C' respetivamente.

Então, pelo teorema dos cinco pontos, existe uma única cônica projetiva não degenerada que passa nos pontos A, B, C, A' e B' de equação:

$$b_3(b_1 - b_2)xy + b_2(b_3 - b_1)xz + b_1(b_2 - b_3)yz = 0$$

Teremos que provar que C' também pertence a esta cônica projetiva, ou seja, que as coordenadas de C' verificam a equação.

$$b_3 (b_1 - b_2) c_1 c_2 + b_2 (b_3 - b_1) c_1 c_3 + b_1 (b_2 - b_3) c_2 c_3 = 0$$

Determinemos a equação da reta BC':

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow c_3 x - c_1 z = 0$$

e da recta B'C:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow b_2 x - b_1 y = 0$$

O ponto P é o ponto de interseção destas duas retas:

$$\begin{cases} c_3 x - c_1 z = 0 \\ b_2 x - b_1 y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{c_3}{c_1} x \\ y = \frac{b_2}{b_1} x \end{cases}$$

$$P = \left[x : \frac{b_2}{b_1} x : \frac{c_3}{c_1} x \right] = [b_1 c_1 : b_2 c_1 : b_1 c_3]$$

A reta CA' tem como equação $x = y$ e a recta C'A tem por equação:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow c_3 y - c_2 z = 0$$

O ponto Q pertence às duas rectas:

$$\begin{cases} x = y \\ c_3 y - c_2 z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = \frac{c_3}{c_2} y \end{cases}$$

$$Q = \left[y : y : \frac{c_3}{c_2} y \right] = [c_2 : c_2 : c_3]$$

A reta AB' tem equação:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -b_3 y + b_2 z = 0$$

e a reta A'B tem equação $x = z$.

O ponto R é o ponto de interseção das duas retas:

$$\begin{cases} -b_3 y + b_2 z \\ x = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{b_2}{b_3} z \\ x = z \end{cases}$$

$$R = \left[z : \frac{b_2}{b_3} z : z \right] = [b_3 : b_2 : b_3]$$

Como P , Q e R são colineares, temos que:

$$\begin{vmatrix} b_1 c_1 & b_2 c_1 & b_1 c_3 \\ c_2 & c_2 & c_3 \\ b_3 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow b_1 c_1 (c_2 b_3 - b_2 c_3) + b_2 c_1 (c_3 b_3 - c_2 b_3) + b_1 c_3 (c_2 b_2 - b_3 c_2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b_1 b_3 c_1 c_2 - b_1 b_2 c_1 c_3 + b_2 b_3 c_1 c_3 - b_2 b_3 c_1 c_2 + b_1 b_2 c_2 c_3 - b_1 b_3 c_2 c_3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b_3 (b_1 - b_2) c_1 c_2 + b_2 (b_3 - b_1) c_1 c_3 + b_1 (b_2 - b_3) c_2 c_3 = 0$$

Ou seja, o ponto C' também pertence à cônica projetiva.

Os pontos A , B , C , A' , B' e C' pertencem à mesma cônica projetiva não degenerada. ■

Tal como o Teorema de Pascal, também o seu recíproco dá lugar a três corolários num plano afim, que são recíprocos dos três corolários a que deu origem o Teorema de Pascal.

Assim,

Corolário 3.2.7 :

Sejam A , B , C , A' , B' e C' seis pontos em \mathbb{R}^2 , dos quais não existem três colineares. Sejam P , Q e R os pontos de interseção de BC' e $B'C$, de CA' e $C'A$ e de AB' e $A'B$, respetivamente.

Se P , Q e R são colineares, então os pontos A , B , C , A' , B' e C' pertencem a uma cônica plana não degenerada.

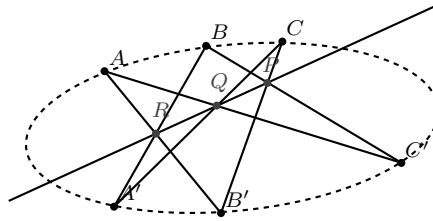


Fig. 3.9: Representação do recíproco do teorema de Pascal no plano afim.

Corolário 3.2.8 *Sejam A , B , C , A' , B' e C' seis pontos em \mathbb{R}^2 , dos quais não existem três colineares. Sejam P e Q os pontos de interseção de BC' e $B'C$ e de CA' e $C'A$ respetivamente e sejam $A'B$ e AB' retas paralelas.*

Se PQ é paralela a $A'B$ e AB' , então os pontos A , B , C , A' , B' e C' pertencem a uma cônica plana não degenerada.

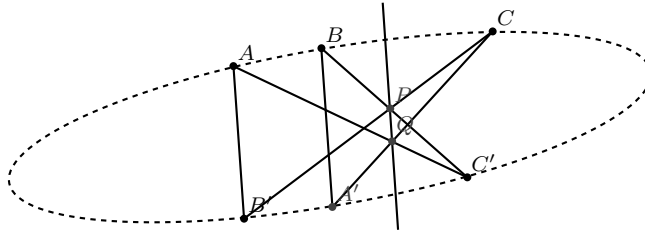


Fig. 3.10: Representação do recíproco do Teorema de Pascal no plano afim. Caso em que $A'B // AB' // PQ$

Corolário 3.2.9 *Sejam A, B, C, A', B' e C' seis pontos em \mathbb{R}^2 , dos quais não existem três colineares, tais que as retas AB' e $A'B$ e as retas AC' e $A'C$ são paralelas.*

Então os pontos A, B, C, A', B' e C' pertencem a uma cônica plana não degenerada.

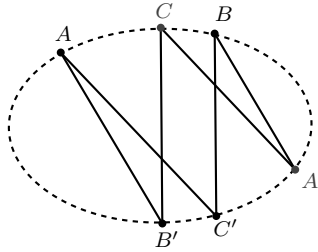


Fig. 3.11: Representação do recíproco do teorema de Pascal. Caso em que $AB' // A'B$ e $AC' // A'C$.

3.3 Tangentes e polares

Definição 3.3.1 *Chama-se **polar de um ponto** $P \equiv [p_1 : p_2 : p_3]$ do plano projetivo relativamente a uma cônica projetiva não degenerada E de equação $\alpha x^2 + 2\gamma xy + \beta y^2 + 2\eta xz + 2\mu yz + \kappa z^2 = 0$ à reta projetiva definida pela equação*

$$(p_1 \ p_2 \ p_3) \begin{pmatrix} \alpha & \gamma & \eta \\ \gamma & \beta & \mu \\ \eta & \mu & \kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

*Se o ponto P está na cônica, então pertence à sua polar e a polar diz-se **tangente** no ponto P .*

Exemplo:

Consideremos a cônica projetiva E de equação

$$2x^2 + 3xy + 4y^2 + 2xz - 6yz + 2z^2 = 0$$

e determinemos a tangente a esta cônica no ponto $P \equiv [0 : 1 : 2] \in E$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & 4 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 7x - 4y + 2z = 0$$

A tangente projectiva à cônica E em P é a reta projectiva de equação $7x - 4y + 2z = 0$

Determinemos também a polar do ponto $Q \equiv [1 : 0 : 2] \notin E$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & 4 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 8x - 9y + 10z = 0.$$

A polar projectiva de Q relativamente a E é a reta projectiva de equação $8x - 9y + 10z = 0$.

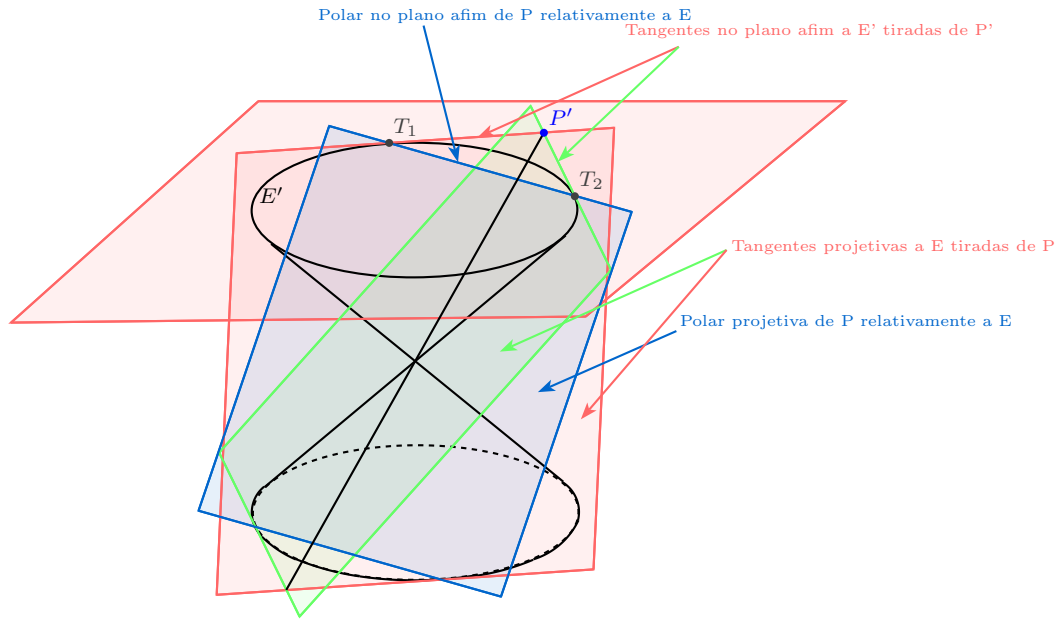


Fig. 3.12: Representação de tangentes e polares a uma cônica projetiva e respectiva configuração num plano afim.

Proposição 3.3.2 *Se P pertence a uma cônica não degenerada E e r é a polar de P relativamente a E então*

$$E \cap r = \{P\}$$

Para demonstrar esta proposição iremos necessitar de um lema, que passaremos a enunciar e demonstrar.

Lema 3.3.3 *Uma reta projetiva não contida numa cónica incide nela no máximo em dois pontos.*

Demonstração:

Seja E uma cónica projetiva de equação $\alpha x^2 + 2\gamma xy + \beta y^2 + 2\eta xz + 2\mu yz + \kappa z^2 = 0$ e seja $r : ax + by + cz = 0$ a equação do plano vetorial que define a reta projetiva \mathbf{r} .

Para a, b e c não nulos, tem-se que $ax + by + cz = 0 \Leftrightarrow z = \frac{-ax-by}{c}$.

A interseção da reta e da cónica é dada por:

$$\alpha x^2 + 2\gamma xy + \beta y^2 + 2\eta x \left(\frac{-ax-by}{c} \right) + 2\mu y \left(\frac{-ax-by}{c} \right) + \kappa \left(\frac{-ax-by}{c} \right)^2 = 0$$

Resolvendo esta equação em ordem a uma das incógnitas (x ou y), como se trata de uma equação simples do segundo grau não trivial porque a reta não está contida na cónica, tem, no máximo, duas soluções.

■

Demonstração da proposição 3.3.2:

Sejam $P \equiv [p_1 : p_2 : p_3]$ tal que $P \in E \cap \mathbf{r}$ e M a matriz associada à cónica E .

Tem-se que

$$(p_1 \ p_2 \ p_3) M \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = 0$$

(em particular, P pertence efectivamente à polar)

Suponhamos que $X \equiv [x_1 : x_2 : x_3] \in E \cap \mathbf{r}$.

Então,

$$(x_1 \ x_2 \ x_3) M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (X \in E)$$

$$(p_1 \ p_2 \ p_3) M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (X \in \mathbf{r})$$

Então,

$$(p_1 - x_1 \ p_2 - x_2 \ p_3 - x_3) M \begin{pmatrix} p_1 - x_1 \\ p_2 - x_2 \\ p_3 - x_3 \end{pmatrix} =$$

$$(p_1 \ p_2 \ p_3) M \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} - (x_1 \ x_2 \ x_3) M \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} - (p_1 \ p_2 \ p_3) M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + (x_1 \ x_2 \ x_3) M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

porque $(x_1 \ x_2 \ x_3) M \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}$ e $M = M^T$

Analogamente, tem-se que

$$(p_1 \ p_2 \ p_3) M \begin{pmatrix} p_1 - x_1 \\ p_2 - x_2 \\ p_3 - x_3 \end{pmatrix} = 0$$

e portanto,

$$Y = [p_1 - x_1 : p_2 - x_2 : p_3 - x_3] \in E \cap \mathbf{r}$$

Obter-se-ia que $X, P, Y \in E \cap \mathbf{r}$, mas como \mathbf{r} não está contida em E então, no máximo, há dois pontos de incidência e portanto $X = P$ ou $Y = X$ ou $Y = P$. De facto,

$$Y = X \Rightarrow [p_1 - x_1 : p_2 - x_2 : p_3 - x_3] = [x_1 : x_2 : x_3] \Rightarrow P = X$$

$$Y = P \Rightarrow [p_1 - x_1 : p_2 - x_2 : p_3 - x_3] = [p_1 : p_2 : p_3] \Rightarrow P = Y$$

■

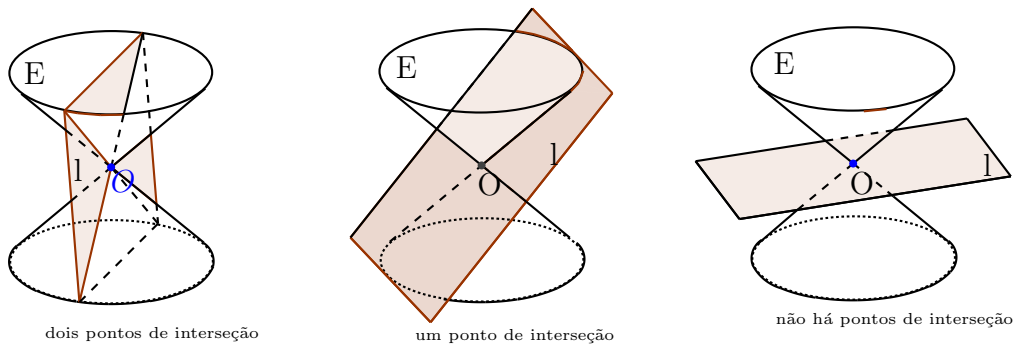


Fig. 3.13: Interseção de uma cônica projetiva com uma reta projetiva.

Nota: Se \mathbf{r} é a tangente a uma cônica projetiva E , então a reta \mathbf{r}' que representa \mathbf{r} num plano fixo π é a tangente à cônica plana E' que representa E em π , no sentido usual da geometria diferencial.²

Proposição 3.3.4 *Seja t uma transformação projetiva e E uma cônica projetiva não degenerada, P um ponto do plano projetivo e \mathbf{r} a reta polar de P relativamente a E . Então a polar do ponto projetivo $t(P)$ relativamente à cônica $t(E)$ é precisamente $t(\mathbf{r})$.*

Demonstração:

Seja t uma transformação projetiva de matriz associada A , E uma cônica projetiva de matriz associada M e P um ponto do plano projetivo.

$$P \equiv [p_1 : p_2 : p_3]$$

A polar \mathbf{r} de P relativamente a E é a reta definida por

$$(p_1 \ p_2 \ p_3) M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0,$$

ou seja, $\mathbf{r} = [l_1 : l_2 : l_3]$ com $(l_1 \ l_2 \ l_3) = (p_1 \ p_2 \ p_3) M$

A imagem da polar de P através de t é a reta $t(\mathbf{r})$ definida por

$$(l_1 \ l_2 \ l_3) A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

ou seja

$$(p_1 \ p_2 \ p_3) M A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

A imagem de P através de t é $t(P) = [p'_1 : p'_2 : p'_3]$

com

$$\begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ p'_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix},$$

ou equivalentemente, $(p'_1 \ p'_2 \ p'_3) = (p_1 \ p_2 \ p_3) A^T$

A imagem de E através de t é a cônica associada à matriz

$$(A^{-1})^T M A^{-1}$$

A polar de $t(P)$ relativamente a $t(E)$ é a reta

²"Géométrie", M. Audin, Editions Espaces 34 (1998) : (proposição 1.7 Capítulo VI)

$$(p'_1 \ p'_2 \ p'_3) (A^{-1})^T M A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Substituindo,

$$(p_1 \ p_2 \ p_3) A^T (A^{-1})^T M A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (p_1 \ p_2 \ p_3) M A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Concluindo, a polar do ponto projetivo $t(P)$ relativamente à cônica $t(E)$ é precisamente $t(\mathbf{r})$.

■

A Forma Standard $x^2 + y^2 = z^2$

Já vimos que qualquer cônica projetiva não degenerada pode ser transformada noutra de expressão mais simples, uma vez que todas as cônicas projetivas não degeneradas são projetivo-congruentes.

Em particular, qualquer cônica projetiva não degenerada pode ser transformada na cônica projetiva de equação $x^2 + y^2 = z^2$.

Esta equação utiliza-se muitas vezes para simplificar problemas que envolvam tangentes e polares, uma vez que representa um cone circular reto em \mathbb{R}^3 e intersecta o plano fixo $z = 1$ num círculo de raio 1.

Teorema 3.3.5 :

Seja E uma cônica projetiva de equação

$$x^2 + y^2 = z^2$$

e seja $P = [a : b : c]$ um ponto em \mathbb{P} . Então a polar de P relativamente a E é

$$ax + by - cz = 0$$

Demonstração:

Seja E uma cônica projetiva de equação $x^2 + y^2 = z^2$ e seja $P \equiv [a : b : c]$ um ponto em \mathbb{P} .

A equação da polar de P relativamente a E é dada por:

$$(a \ b \ c) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow ax + by - cz = 0$$

■

Exemplo:

A equação da reta tangente à cônica E de equação $x^2 + y^2 = z^2$ no ponto $P \equiv [1 : 0 : 1] \in E$ é $x - z = 0$ e a equação da polar de $Q \equiv [1 : 0 : 0] \notin E$, relativamente a E , é $x = 0$.

Teorema 3.3.6 Teorema de La Hire.

Seja E uma cônica projetiva não degenerada e seja P um ponto em \mathbb{P} , de polar \mathbf{p} relativamente a E .

Então, a polar de qualquer ponto Q em \mathbf{p} passa por P .

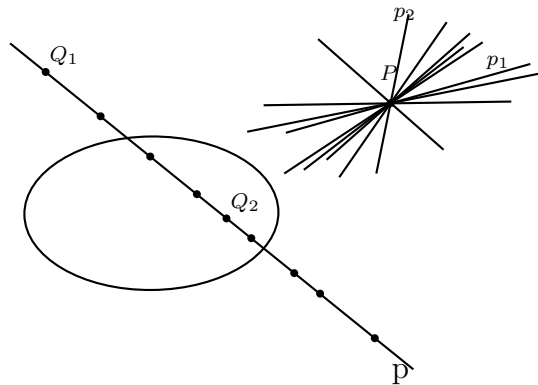


Fig. 3.14: Representação do Teorema de La Hire num plano fixo

Demonstração:

Podemos assumir que a equação da cônica projetiva está na forma standard $x^2 + y^2 = z^2$, uma vez que todas as cônicas projetivas não degeneradas são projetivo-congruentes.

Seja P um ponto de coordenadas homogêneas $[p_1 : p_2 : p_3]$.

Pelo teorema anterior, a equação da polar \mathbf{p} de P é

$$p_1x + p_2y - p_3z = 0$$

Seja $Q = [q_1 : q_2 : q_3]$ um ponto em \mathbf{p} , então

$$p_1q_1 + p_2q_2 - p_3q_3 = 0$$

Novamente, pelo teorema anterior, sabemos que:

$$q_1x + q_2y - q_3z = 0$$

é a equação da polar de Q relativamente a E .

Como $p_1q_1 + p_2q_2 - p_3q_3 = 0$, temos que P incide na polar de Q relativamente a E .

■

Exemplos:

1. Seja E a cônica projetiva não degenerada de equação $x^2 + y^2 = z^2$ e seja

$$P \equiv [1 : 1 : 1] \notin E.$$

A polar \mathbf{p} de P relativamente a E é $x + y - z = 0$.

Consideremos o ponto $P_1 \equiv [1 : 1 : 2] \in \mathbf{p}$

A sua polar \mathbf{p}_1 tem equação $x + y - 2z = 0$

$P \in \mathbf{p}_1$, uma vez que $1 + 1 - 2 \times 1 = 0$

Consideremos um outro ponto qualquer de \mathbf{p} , digamos $P_2 \equiv [0 : 1 : 1]$. A sua polar \mathbf{p}_2 tem equação $y - z = 0$.

$P \in \mathbf{p}_2$, uma vez que $1 - 1 = 0$.

2. Seja E a cônica projetiva não degenerada de equação

$$2x^2 + 3xy + 4y^2 + 2xz - 6yz + 2z^2 = 0.$$

Seja $P \equiv [1 : 0 : 1] \notin E$.

A polar de P relativamente a E tem como equação:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & 4 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x - y + 2z = 0$$

Seja $P_1 \equiv [1 : 4 : 1] \in \mathbf{p}$.

A polar \mathbf{p}_1 de P_1 tem equação:

$$(1 \quad 4 \quad 1) \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & 4 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 18x + 29y - 18z = 0$$

$P \in \mathbf{p}_1$, uma vez que $18 \times 1 + 29 \times 0 - 18 \times 1 = 0$

Corolário 3.3.7 *A polaridade é uma dualidade do plano projetivo.*

Proposição 3.3.8 *A polaridade relativamente a uma cônica própria preserva a razão cruzada.*

Ressalta-se que os pontos da cônica dualizam em tangentes da cônica.

Demonstração:

Como todas as cônicas projetivas não degeneradas são projetivo-congruentes, podemos supor C definida pela equação

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Se $A \equiv [a_1 : a_2 : a_3]$ é um ponto do plano projetivo, a reta polar de A relativamente a C está associada ao plano vetorial de equação:

$$(a_1 \quad a_2 \quad a_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Isto é, $a_1x + a_2y - a_3z = 0$.

Assim, a polar de A é $\mathbf{a} = [a_1 : a_2 : -a_3]$

Então, dados quatro pontos colineares A, B, C e D e as suas polares $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ e \mathbf{d} , tem-se

$$A \equiv [a_1 : a_2 : a_3] \quad \mathbf{a} = [a_1 : a_2 : -a_3]$$

$$B \equiv [b_1 : b_2 : b_3] \quad \mathbf{b} = [b_1 : b_2 : -b_3]$$

$$C \equiv [c_1 : c_2 : c_3] \quad \mathbf{c} = [c_1 : c_2 : -c_3]$$

$$D \equiv [d_1 : d_2 : d_3] \quad \mathbf{d} = [d_1 : d_2 : -d_3]$$

Se $(c_1, c_2, c_3) = \alpha(a_1, a_2, a_3) + \beta(b_1, b_2, b_3)$ e $(d_1, d_2, d_3) = \gamma(a_1, a_2, a_3) + \delta(b_1, b_2, b_3)$, então $(c_1, c_2, -c_3) = \alpha(a_1, a_2, -a_3) + \beta(b_1, b_2, -b_3)$ e $(d_1, d_2, -d_3) = \gamma(a_1, a_2, -a_3) + \delta(b_1, b_2, -b_3)$, pelo que,

$$(A, B, C, D) = \frac{\beta\gamma}{\alpha\delta}.$$

■

Nota: Se temos uma reta projetiva tangente a uma cónica projetiva não degenerada, o traço afim da reta é o traço afim da reta tangente ao traço afim da cónica, como se ilustra na figura 3.14.

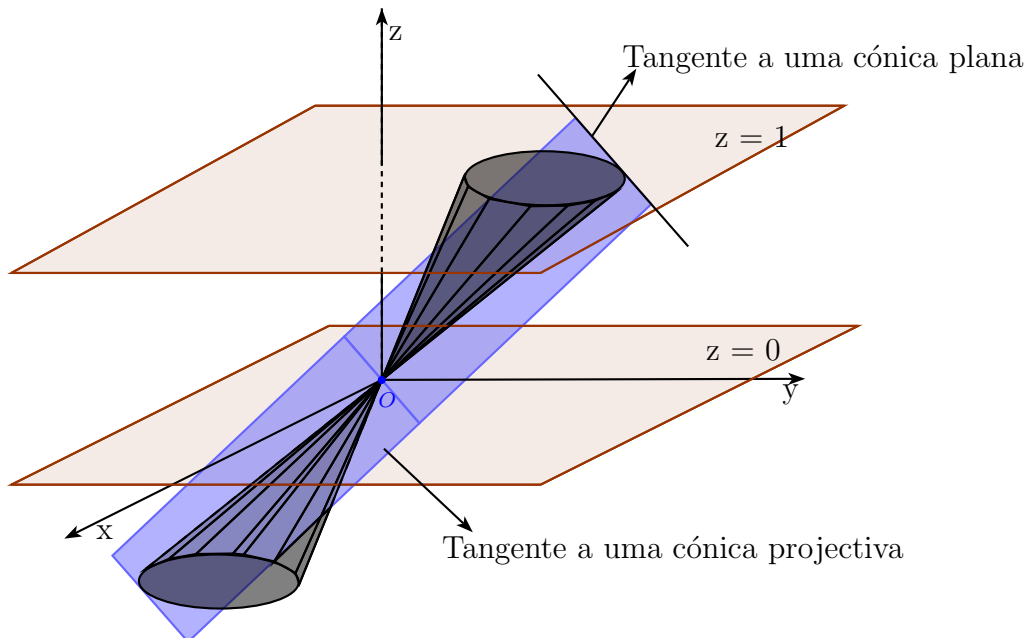


Fig. 3.15: Tangente a uma cónica projetiva e respetivo traço afim.

Teorema 3.3.9 (Teorema das três tangentes)

Seja uma cônica projetiva não degenerada que toca os lados BC , CA e AB do triângulo $[ABC]$ em \mathbb{P} nos pontos P , Q e R , respectivamente. Então AP , BQ e CR são concorrentes.

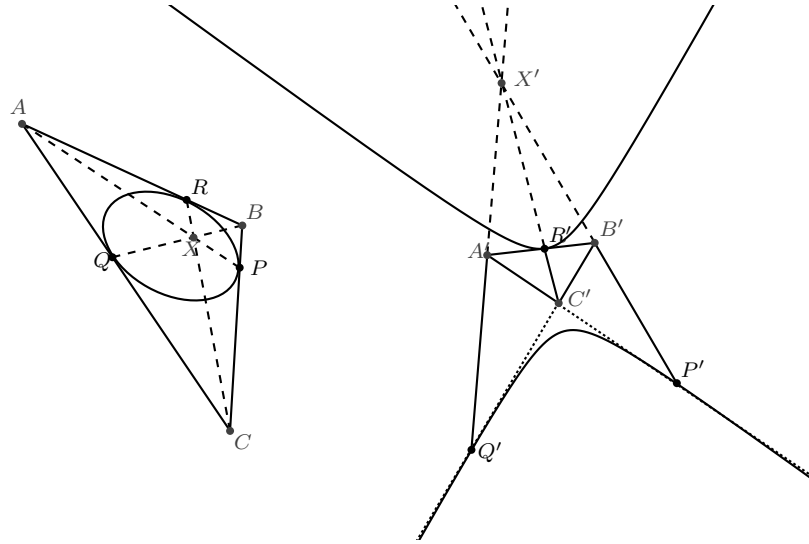


Fig. 3.16: Representação do teorema das três tangentes.

Demonstração:

Como “ser cônica não degenerada”, as suas tangentes e a concorrência de retas são propriedades projetivas, basta provar este teorema para uma qualquer cônica projetiva não degenerada.

Seja E uma cônica projetiva não degenerada e sejam P , Q e R três pontos dessa cônica.

Pelo teorema dos três pontos, existe uma transformação projetiva t que transforma E na cônica projetiva de equação $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ e de tal forma que $t(P) = [0 : 1 : 1]$, $t(Q) = [-1 : 0 : 1]$ e $t(R) = [1 : 0 : 1]$

se enviarmos a reta projetiva $z = 0$ ao infinito, temos a seguinte configuração:

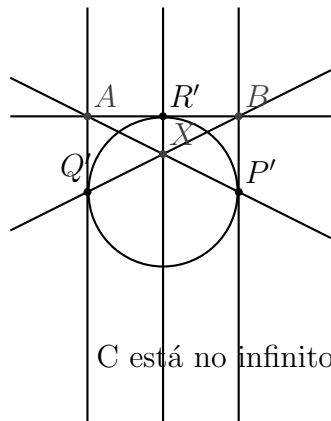


Fig. 3.17:

Nesta configuração afim, as retas AQ' , RC' e BP' são paralelas, ou seja, projetivamente concorrem num ponto do infinito.

■

Como este teorema envolve apenas propriedades projetivas, podemos também enunciarlo em \mathbb{R}^2 .

Assim,

Corolário 3.3.10 *Seja uma cônica plana não degenerada que toca os lados BC , CA e AB do triângulo $[ABC]$ em \mathbb{P} nos pontos P , Q e R , respectivamente. Então AP , BQ e CR são concorrentes.*

Teorema 3.3.11 (Teorema das três tangentes e três cordas.)

Seja $[PQR]$ um triângulo inscrito numa cônica projetiva não degenerada e sejam A , B e C os pontos de interseção das tangentes em P , Q e R com as retas QR , RP e PQ respectivamente.

Então A , B e C são colineares.

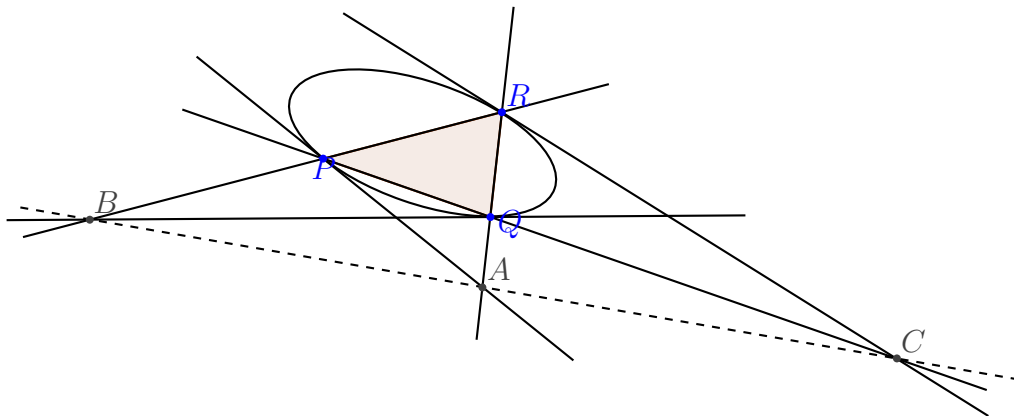


Fig. 3.18: Representação afim do teorema das três tangentes e três cordas.

Demonstração:

Novamente, como todas as cônicas projetivas não degeneradas são projetivo-congruentes, podemos assumir que a equação da cônica projetiva está na forma standard $x^2 + y^2 = z^2$.

Uma vez que os pontos $[1 : 0 : 1]$, $[1 : 0 : -1]$ e $[0 : 1 : 1]$ pertencem a esta cónica, podemos considerar $P = [1 : 0 : 1]$, $Q = [1 : 0 : -1]$ e $R = [0 : 1 : 1]$.

Sendo assim, a equação da tangente a E em P tem como equação:

$$1x + 0y - 1z = 0 \Leftrightarrow x - z = 0$$

A reta QR tem equação:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - y + z = 0$$

Uma vez que A é o ponto de interseção destas duas retas, temos que:

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 2z \end{cases}$$

$$A = [z : 2z : z] = [1 : 2 : 1]$$

A equação da tangente a E em Q é:

$$1x + 0y + 1z = 0 \Leftrightarrow x + z = 0$$

A reta RP tem como equação:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + y - z = 0$$

Como B pertence a estas duas retas,

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = 2z \end{cases}$$

$$B = [-z : 2z : z] = [-1 : 2 : 1]$$

A equação da tangente a E em R é:

$$0x + 1y - 1z = 0 \Leftrightarrow y - z = 0$$

A equação da reta PQ é $y = 0$.

Sendo C o pnto de interseção das duas retas, temos que:

$$\begin{cases} y - z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$C = [x : 0 : 0] = [1 : 0 : 0]$$

Verifiquemos agora que A , B e C são colineares.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times 0 + 2 \times 1 + 1 \times (-2) = 0 + 2 - 2 = 0$$

Logo, A , B e C são colineares. ■

Exemplo:

Consideremos novamente a cônica E de equação

$2x^2 + 3xy + 4y^2 + 2xz - 6yz + 2z^2 = 0$ e os pontos projetivos $P \equiv [0 : 1 : 2]$, $Q \equiv [0 : 1 : 1]$ e $R \equiv [-4 : 1 : 3]$ pertencentes a E .

A reta t_1 tangente em P é dada por:

$$(0 \quad 1 \quad 2) \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & 4 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{7}{2}x - 2y + z = 0 \Leftrightarrow 7x - 4y + 2z = 0$$

A reta t_2 tangente em Q por:

$$(0 \quad 1 \quad 1) \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & 4 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{2}x + y - z = 0 \Leftrightarrow 5x + 2y - 2z = 0$$

e a reta t_3 , tangente a R por:

$$(-4 \quad 1 \quad 3) \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & 4 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\frac{7}{2}x - 11y - z = 0 \Leftrightarrow 7x + 22y + 2z = 0$$

A reta QR é dada por:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 2z = 0$$

A reta RP por:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ -4 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -x + 8y - 4z = 0$$

E a reta PQ por:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$A = t_1 \cap QR:$$

$$\begin{cases} 7x - 4y + 2z = 0 \\ x - 2y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{6}{5}z \\ x = \frac{2}{5}z \end{cases}$$

$$A \equiv \left[\frac{2}{5}z : \frac{6}{5}x : z \right] = [2 : 6 : 5]$$

$$B = t_2 \cap RP:$$

$$\begin{cases} 5x + 2y - 2z = 0 \\ -x + 8y - 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{21}{4}x \\ y = \frac{11}{4}x \end{cases}$$

$$B \equiv \left[x : \frac{11}{4}x : \frac{21}{4}x \right] = [4 : 11 : 21]$$

$$C = t_3 \cap PQ:$$

$$\begin{cases} 7x + 22y + 2z = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -11y \\ x = 0 \end{cases}$$

$$C \equiv [0 : y : -11y] = [0 : 1 : -11]$$

Verifiquemos que A , B e C são colineares:

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 4 & 11 & 21 \\ 0 & 1 & -11 \end{vmatrix} = 2 \times (-121 - 21) + 6 \times 44 + 5 \times 4 = 0$$

Corolário 3.3.12 *Seja $[PQR]$ um triângulo inscrito numa cónica afim não degenerada e sejam A, B e C os pontos de intersecção das tangentes em P, Q e R com as retas QR , RP e PQ respetivamente.*

Então A, B e C são colineares.

Como já tivemos oportunidade de verificar, a geometria projetiva permite-nos, usando coordenadas homogêneas, o teorema fundamental da geometria projetiva, o teorema dos três pontos e o facto de todas as cónicas projetivas não degeneradas serem projetivo-congruentes, particularizar pontos e cónicas projetivas para demonstrar resultados que de outra forma seria muito complicado. Apenas temos que ter o cuidado de escolher os pontos ou as cónicas mais convenientes para o resultado que pretendemos provar.

Outra das grandes potencialidades da Geometria Projetiva é o Princípio da Dualidade. Como já vimos no capítulo anterior, podemos obter novos teoremas e propriedades usando este princípio.

Para vermos um exemplo dessa aplicação iremos dualizar o Teorema de Pascal, usando a polaridade.

Relembrando o Teorema de Pascal,

Teorema de Pascal:

Sejam A, B, C, A', B' e C' seis pontos distintos de uma cônica projetiva não degenerada.

Sejam P, Q e R os pontos de interseção de BC' e $B'C$, de CA' e $C'A$ e de AB' e $A'B$, respectivamente.

Então P, Q e R são colineares.

Dualizando este teorema usando a polaridade, temos:

Teorema: *Sejam a, b, c, a', b' e c' seis tangentes distintas a uma cônica projetiva não degenerada.*

Sejam p, q e r as retas definidas pelos pontos $b \cap c'$ e $b' \cap c$, $c \cap a'$ e $c' \cap a$, $a \cap b'$ e $a' \cap b$, respectivamente.

Então p, q e r são concorrentes.

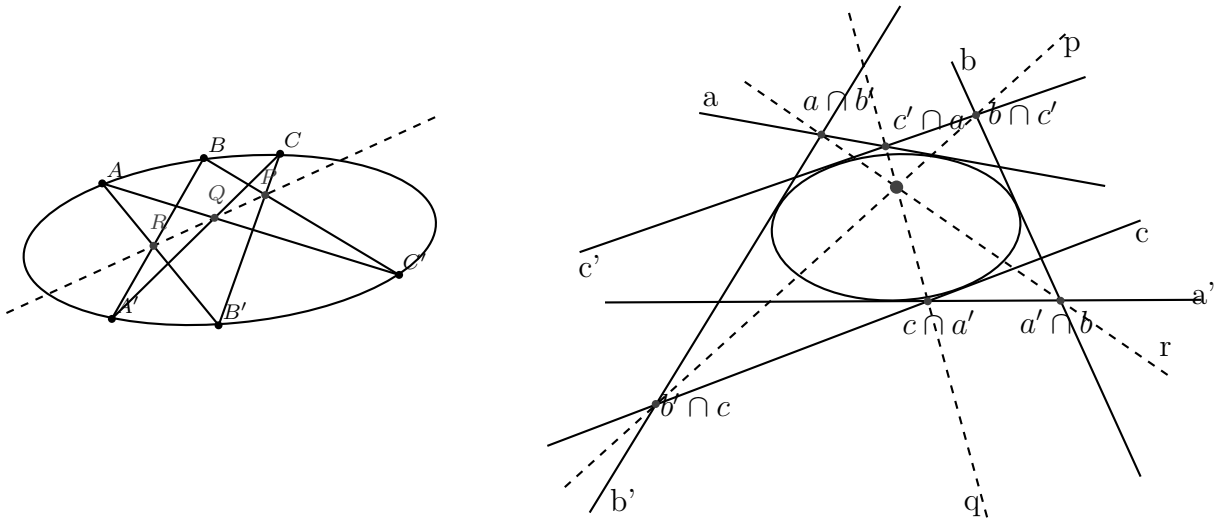


Fig. 3.19: Representação do teorema de Pascal e seu dual.

Este teorema dual do teorema de Pascal tem o nome de teorema de Brianchon para cônicas projetivas e pode ser enunciado da seguinte forma:

Teorema 3.3.13 Teorema de Brianchon para cônicas projetivas.

As diagonais que ligam vértices opostos de um hexágono projetivo, circunscrito a uma cônica projetiva não degenerada são concorrentes.

Podemos também dualizar outros teoremas, relativos a cónicas projetivas, como por exemplo, o teorema dos cinco pontos.

Relembremos o teorema dos cinco pontos:

Teorema dos cinco pontos:

Por um conjunto de cinco pontos projetivos, entre os quais não existem três colineares, passa uma única cónica projetiva não degenerada.

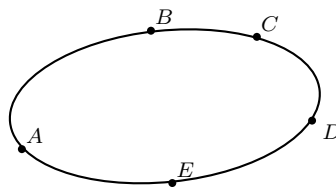


Fig. 3.20: Representação do teorema dos cinco pontos.

Dualizando, temos:

Teorema 3.3.14 *Qualquer conjunto de cinco retas projetivas, entre as quais não existem três concorrentes, determina uma cónica projetiva não degenerada tangente a essas retas.*

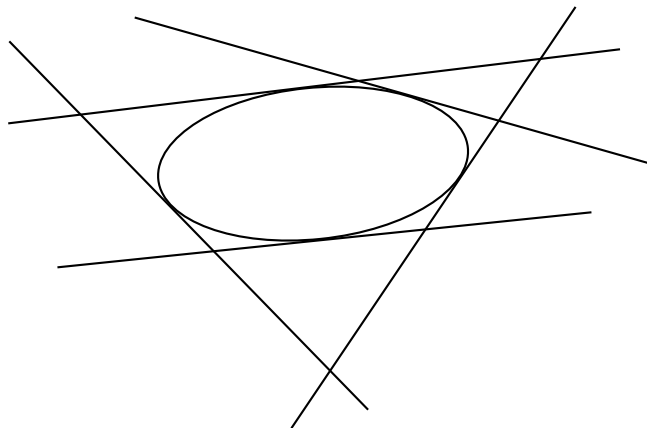


Fig. 3.21: Representação do teorema dual do teorema dos cinco pontos.

3.4 Razão Cruzada e Cónicas Projetivas

No capítulo anterior, definimos razão cruzada de quatro pontos projetivos colineares. Neste capítulo iremos definir a razão cruzada de quatro pontos pertencentes a uma cónica projetiva não degenerada.

Definição 3.4.1 *Razão cruzada de quatro pontos de uma cônica.*

Chamamos *razão cruzada de quatro pontos distintos A, B, C e D de uma cônica projetiva não degenerada E* à razão cruzada das retas AP, BP, CP e DP onde P é um ponto qualquer de E .

Exemplo:

Consideremos a cônica projetiva de equação $xy+xz+yz=0$ e os pontos projetivos $A \equiv [1:0:0]$, $B \equiv [0:1:0]$, $C \equiv [0:0:1]$, $D \equiv [-2:-2:1]$ e $P \equiv [6:3:-2]$ pertencentes a E .

$\langle A, P \rangle$:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2y + 3z = 0$$

As coordenadas de Plucker de $\langle A, P \rangle$ são $[0:2:3]$

$\langle C, P \rangle$:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + 3z = 0$$

As coordenadas de Plucker de $\langle C, P \rangle$ são $[1:0:3]$

$\langle D, P \rangle$:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ -2 & -2 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - 2y = 0$$

As coordenadas de Plucker de $\langle D, P \rangle$ são $[1:-2:0]$

$\langle A, P \rangle$:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ -2 & -2 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 6z = 0$$

As coordenadas de Plucker de $\langle D, P \rangle$ são $[1:2:6]$

Chamemos A_1, B_1, C_1 e D_1 aos pontos correspondentes às coordenadas de Plucker de AP, BP, CP e DP respetivamente.

$$(1, -2, 0) = \alpha(0, 2, 3) + \beta(1, 3) \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 1 \\ \alpha = -1 \end{cases}$$

$$(1, 2, 6) = \gamma (0, 2, 3) + \delta (1, 3) \Leftrightarrow \begin{cases} \delta = 1 \\ \gamma = 1 \end{cases}$$

$$(A, B, C, D) = (A_1, B_1, C_1, D_1) = \frac{1}{-1} / \frac{1}{1} = -1$$

É importante referir que o valor da razão cruzada de quatro pontos numa cónica é independente da escolha do ponto P escolhido.

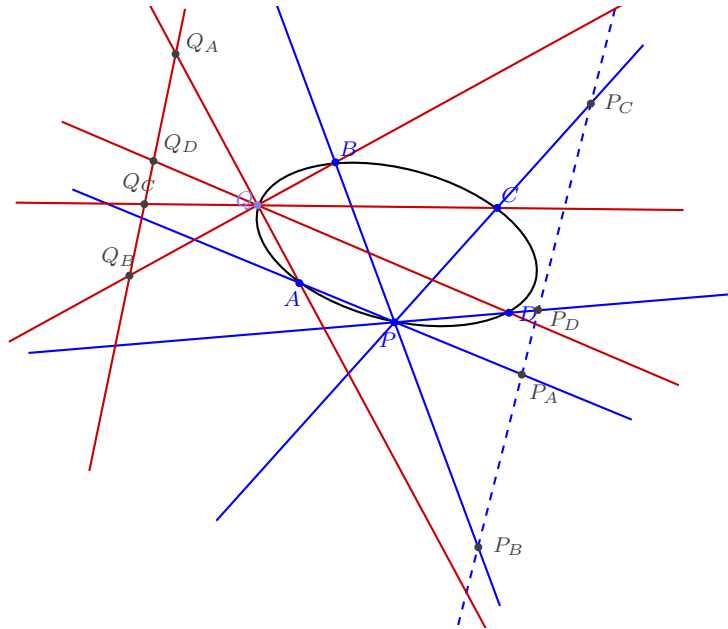


Fig. 3.22:

Proposição 3.4.2 *Sejam C uma cónica projetiva não degenerada, A, B, C, D, P e Q pontos de C todos distintos. Então*

$$(AP, BP, CP, DP) = (AQ, BQ, CQ, DQ)$$

Por outras palavras, o valor da razão cruzada das retas AP, BP, CP, DP é independente do ponto P escolhido.

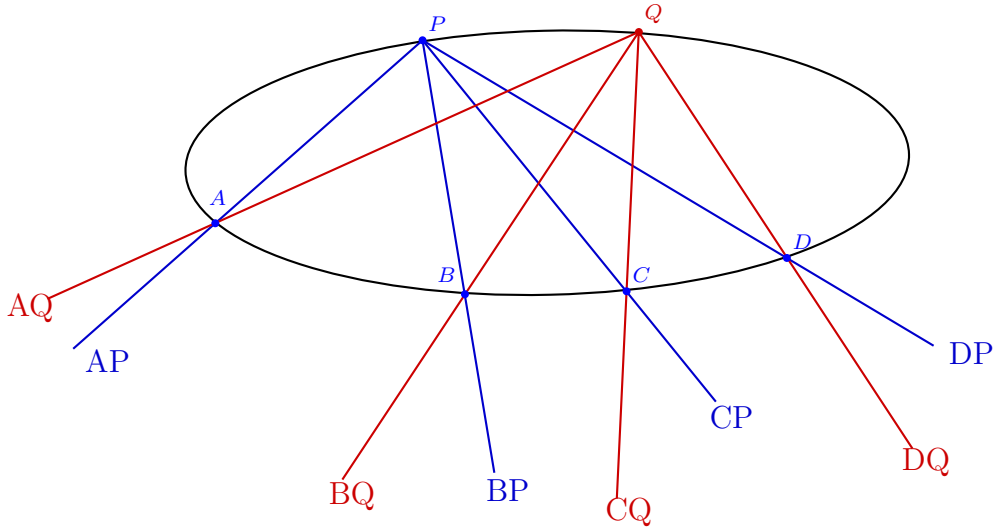


Fig. 3.23:

Demonstração:

Uma transformação projetiva preserva a colinearidade, a incidência e a razão cruzada, pelo que, usando o teorema dos três pontos podemos supor que C é a cônica de equação reduzida

$$xy + yz + zx = 0$$

e tal que $P \equiv [1 : 0 : 0]$ e $Q \equiv [0 : 1 : 0]$

Pelo teorema da parametrização, existe $t_A \in \mathbb{R}$, tal que $A \equiv [t_A^2 + t_A : t_A + 1 : -t_A]$ com $t_A \neq 0$, porque $A \neq Q$.

A reta $\langle AP \rangle$ está associada ao plano vetorial de equação

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ t_A^2 + t_A & t_A + 1 & -t_A \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -t_A y - (t_A + 1)z = 0$$

Em coordenadas de Plucker, $AP = [0 : -t_A : -(t_A + 1)] = [0 : t_A : t_A + 1]$

De modo análogo, se $B \equiv [t_B^2 + t_B : t_B + 1 : -t_B]$, $C \equiv [t_C^2 + t_C : t_C + 1 : -t_C]$ e $D \equiv [t_D^2 + t_D : t_D + 1 : -t_D]$, obtemos $BP = [0 : t_B : t_B + 1]$, $CP = [0 : t_C : t_C + 1]$ e $DP = [0 : t_D : t_D + 1]$.

A reta QA está associada ao plano vetorial de equação

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ t_A^2 + t_A & t_A + 1 & -t_A \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -t_A x - (t_A^2 + t_A)z = 0$$

Em coordenadas de Plucker, $QA = [t_A : 0 : t_A^2 + t_A]$ e, de modo análogo $QB = [t_B : 0 : t_B^2 + t_B]$, $QC = [t_C : 0 : t_C^2 + t_C]$ e $QD = [t_D : 0 : t_D^2 + t_D]$

Como a razão cruzada de quatro retas é igual à razão cruzada dos seus pontos duais de Plucker, podemos calcular essa razão cruzada usando as coordenadas de Plucker.

Escrevemos,

$$(0, t_C, t_C + 1) = \alpha (0, t_A, t_A + 1) + \beta (0, t_B, t_B + 1) \quad (3.1)$$

$$(0, t_D, t_D + 1) = \gamma (0, t_A, t_A + 1) + \delta (0, t_B, t_B + 1) \quad (3.2)$$

$$(t_C, 0, t_C^2 + t_C) = \alpha' (t_A, 0, t_A^2 + t_A) + \beta' (t_B, 0, t_B^2 + t_B) \quad (3.3)$$

$$(t_D, 0, t_D^2 + t_D) = \gamma' (t_A, 0, t_A^2 + t_A) + \delta' (t_B, 0, t_B^2 + t_B) \quad (3.4)$$

A partir de (3.1), obtemos

$$\begin{cases} t_C = \alpha t_A + \beta t_B \\ t_C + 1 = \alpha (t_A + 1) + \beta (t_B + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_C = \alpha t_A + \beta t_B \\ 1 = \alpha + \beta \end{cases}$$

e, resolvendo o sistema,

$$\alpha = \frac{t_C - t_B}{t_A - t_B} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{t_A - t_C}{t_A - t_B}$$

O sistema obtido a partir de (3.2) é análogo, pelo que,

$$\gamma = \frac{t_D - t_B}{t_A - t_B} \quad \text{e} \quad \delta = \frac{t_A - t_D}{t_A - t_B}$$

A partir de (3.3) obtemos um sistema

$$\begin{cases} t_C = \alpha' t_A + \beta' t_B \\ t_C^2 + t_C = \alpha' t_A^2 + \alpha' t_A + \beta' t_B^2 + \beta' t_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_C = \alpha' t_A + \beta' t_B \\ t_C^2 = \alpha' t_A^2 + \beta' t_B^2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos

$$\alpha' = \frac{t_C}{t_A} \left(\frac{t_B - t_C}{t_B - t_A} \right) \quad \text{e} \quad \beta' = \frac{t_C}{t_B} \left(\frac{t_C - t_A}{t_B - t_A} \right)$$

O sistema obtido de (3.4) é análogo ao de (3.3), pelo que

$$\gamma' = \frac{t_D}{t_A} \left(\frac{t_B - t_D}{t_B - t_A} \right) \quad \text{e} \quad \delta' = \frac{t_D}{t_B} \left(\frac{t_D - t_A}{t_B - t_A} \right)$$

Finalmente,

$$(AP, BP, CP, DP) = \frac{\beta\gamma}{\alpha\delta} = \frac{(t_A - t_C)(t_D - t_B)}{(t_C - t_B)(t_A - t_D)}$$

$$(AQ, BQ, CQ, DQ) = \frac{\beta' \gamma'}{\alpha' \delta'} = \frac{(t_C - t_A)(t_B - t_D)}{(t_B - t_C)(t_D - t_A)}$$

■

Proposição 3.4.3 *Sejam A, B, C, D e P pontos distintos de uma cônica projetiva não degenerada C e \mathbf{d}_A a reta tangente à cônica no ponto A . Então*

$$(AP, BP, CP, DP) = (\mathbf{d}_A, BA, CA, DA)$$

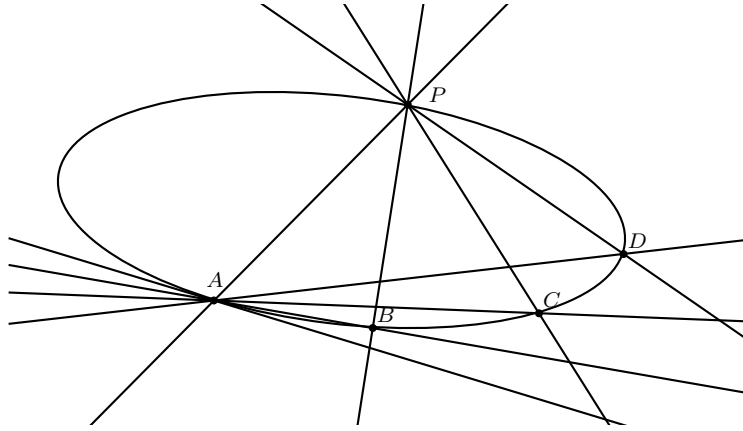


Fig. 3.24:

Demonstração:

Pelo teorema dos três pontos, podemos supor que C está definida pela equação $xy + yz + zx = 0$ e que $P \equiv [1 : 0 : 0]$, $A \equiv [0 : 1 : 0]$, $B \equiv [0 : 0 : 1]$.

Pelo teorema da parametrização

$$C \equiv [t_C^2 + t_C : t_C + 1 : -t_C]$$

$$D \equiv [t_D^2 + t_D : t_D + 1 : -t_D]$$

Pela demonstração do teorema anterior, sabemos que

$$(AP, BP, CP, DP) = \frac{(t_A - t_C)(t_D - t_B)}{(t_C - t_B)(t_A - t_D)}$$

Como $t_A = 0$ e $t_B = -1$, temos que

$$(AP, BP, CP, DP) = \frac{-t_C(t_D + 1)}{-(t_C + 1)t_D} = \frac{t_C(t_D + 1)}{t_D(t_C + 1)}$$

Determinemos as coordenadas de Plucker das retas indicadas:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z = 0$$

Então, as coordenadas de Plucker de \mathbf{d}_A são $\mathbf{d}_A = [1 : 0 : 1]$.

A reta projetiva BA é definida pelo plano vetorial de equação $x = 0$, pelo que, as suas coordenadas de Plucker são $BA = [1 : 0 : 0]$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ t_C^2 + t_C & t_C + 1 & -t_C \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow t_C x + (t_C^2 + t_C) z = 0$$

Ou seja, as coordenadas de Plucker de CA são $CA = [t_C : 0 : t_C^2 + t_C]$

Analogamente, as coordenadas de Plucker de DA são $DA = [t_D : 0 : t_D^2 + t_D]$

$$(t_C, 0, t_C^2 + t_C) = \alpha(1, 0, 1) + \beta(1, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} t_C = \alpha + \beta \\ t_C^2 + t_C = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -t_C^2 \\ \alpha = t_C^2 + t_C \end{cases}$$

$$(t_D, 0, t_D^2 + t_D) = \gamma(1, 0, 1) + \delta(1, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} t_D = \gamma + \delta \\ t_D^2 + t_D = \gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta = -t_D^2 \\ \gamma = t_D^2 + t_D \end{cases}$$

$$(\mathbf{d}_A, BA, CA, DA) = \frac{-t_C^2(t_D^2 + t_D)}{-t_D^2(t_C^2 + t_C)} = \frac{t_C(t_D + 1)}{t_D(t_C + 1)} = (AP, BP, CP, DP)$$

■

Definição 3.4.4 Dizemos que quatro pontos A, B, C e D de uma cónica projetiva não degenerada estão em divisão harmónica se verificarem a condição $(A, B, C, D) = -1$.

Neste caso, tal como no caso de quatro pontos projetivos colineares, dizemos que A e B estão harmonicamente separados por C e D ou que C é o harmónico conjugado de D relativamente a A e B .

Exemplo:

No exemplo tratado anteriormente, os pontos A, B, C e D estão em divisão harmónica uma vez que $(A, B, C, D) = -1$.

Proposição 3.4.5 Sejam A, B, C e D quatro pontos distintos de uma cónica projetiva não degenerada. Os pontos A, B, C e D estão em divisão harmónica se e só se a reta CD passa pelo polo da reta AB .

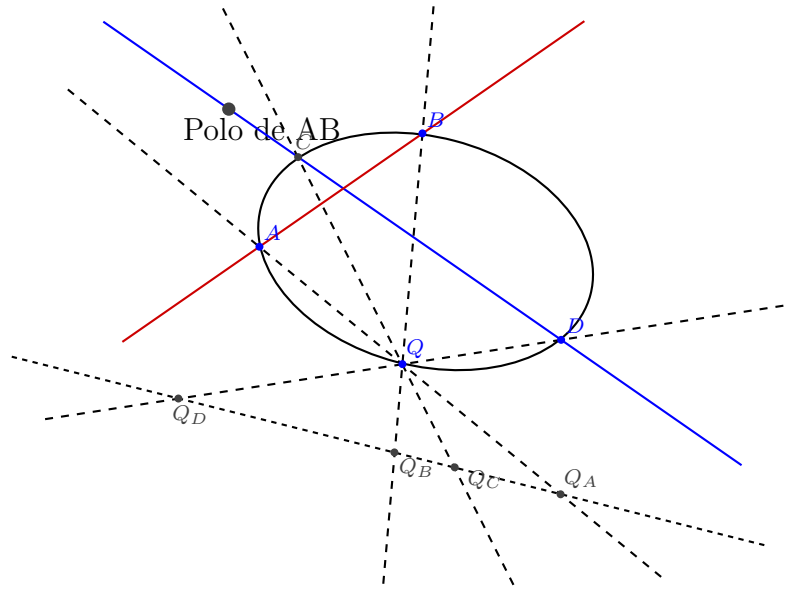


Fig. 3.25:

Demonstração:

Uma vez que todas as cónicas projetivas não degeneradas são projetivo-congruentes, consideremos a cónica projetiva de equação $xy + yz + zx = 0$.

Consideremos os pontos $A \equiv [1 : 0 : 0]$, $B \equiv [0 : 1 : 0]$ e $C \equiv [0 : 0 : 1]$.

Pelo teorema da parametrização, sabemos que qualquer outro ponto diferente de $[1 : 0 : 0]$ desta cónica projetiva tem coordenadas $D \equiv [t^2 + t : t + 1 : -t]$.

Seja ainda $P \equiv [6 : 3 : -2]$ um outro ponto da cónica.

A reta $\langle A, P \rangle$ é dada por

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2y + 3z = 0$$

As coordenadas de Plucker desta reta são $\mathbf{l}_A = [0 : 2 : 3]$.

A equação da reta $\langle B, P \rangle$ é:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + 3z = 0$$

As suas coordenadas de Plucker são $\mathbf{l}_B = [1 : 0 : 3]$

A reta $\langle C, P \rangle$ é dada por:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - 2y = 0$$

As coordenadas de Plucker de $\langle C, P \rangle$ são $\mathbf{l}_C \equiv [1 : -2 : 0]$.

A reta $\langle D, P \rangle$ é dada por:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ t^2 + t & t + 1 & -t \\ 6 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (t - 2)x + (2t^2 - 4t)y + (3t^2 - 3t - 6)z = 0$$

As coordenadas de Plucker são $\mathbf{l}_D = [t - 2 : 2t^2 - 4t : 3t^2 - 3t - 6]$.

Determinemos agora a razão cruzada destas quatro retas projetivas.

$$(1, -2, 0) = \alpha(0, 2, 3) + \beta(1, 0, 3) \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 1 \\ 2\alpha = -2 \\ 3\alpha + 3\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 1 \\ \alpha = -1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (t - 2, 2t^2 - 4t, 3t^2 - 3t - 6) &= \gamma(0, 2, 3) + \delta(1, 0, 3) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \delta = t - 2 \\ 2\gamma = 2t^2 - 4t \\ 3\gamma + 3\delta = 3t^2 - 3t - 6 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \delta = t - 2 \\ \gamma = t^2 - 2t \end{cases} \end{aligned}$$

$$(A, B, C, D) = \frac{1}{-1} / \frac{t - 2}{t^2 - 2t} = -t, \text{ para } t \neq 0, \text{ uma vez que } D \neq B$$

A, B, C e D estão em divisão harmónica se e só se

$$(A, B, C, D) = -1 \Leftrightarrow -t = -1 \Leftrightarrow t = 1$$

Ou seja, o ponto D tem coordenadas homogéneas $D \equiv [2 : 2 : -1]$.

A reta $\langle C, D \rangle$ é dada por:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -x + y = 0$$

A tangente em A é dada por:

$$(1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow y + z = 0$$

A tangente em B é dada por:

$$(0 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + z = 0$$

O polo da reta AB é dado pela interseção destas duas tangentes. Assim,

$$\begin{cases} y + z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -z \\ x = -z \end{cases}$$

O polo da recta $\langle A, B \rangle$ tem coordenadas homogéneas $[-z : -z : z] = [-1 : -1 : 1]$.

Este ponto pertence à recta $\langle C, D \rangle$, uma vez que $-(-1) + (-1) = 0$.

Reciprocamente, consideremos os pontos $A \equiv [1 : 0 : 0]$, $B \equiv [0 : 1 : 0]$, $C \equiv [0 : 0 : 1]$ e $D \equiv [t^2 + t : t + 1 : -t]$ e verifiquemos que, se a recta CD passa pelo polo de AB então A, B, C e D estão em divisão harmónica.

Como já vimos, as tangentes em A e B são, respetivamente $y + z = 0$ e $x + z = 0$ e o polo de AB é o ponto de coordenadas homogéneas $[-1 : -1 : 1]$.

A recta $\langle C, D \rangle$ é dada por:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ t^2 + t & t + 1 & -t \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (-t - 1)x + (t^2 + t)y = 0$$

Se o polo de AB incide em CD , então

$$(-t - 1) \times (-1) + (t^2 + t) \times (-1) = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1$$

Se $t = 1$, então $D \equiv [0 : 0 : 1]$ que coincide com o ponto C . Então $t = 1$ e $D \equiv [2 : 2 : -1]$ e, como já foi verificado, A, B, C e D estão em divisão harmónica.

■

Proposição 3.4.6 Se a, b, c e d são quatro tangentes distintas a uma cónica não degenerada C e t é qualquer tangente a C , a razão cruzada de quatro pontos $(a \cap t, b \cap t, c \cap t, d \cap t)$ é constante.

Demonstração:

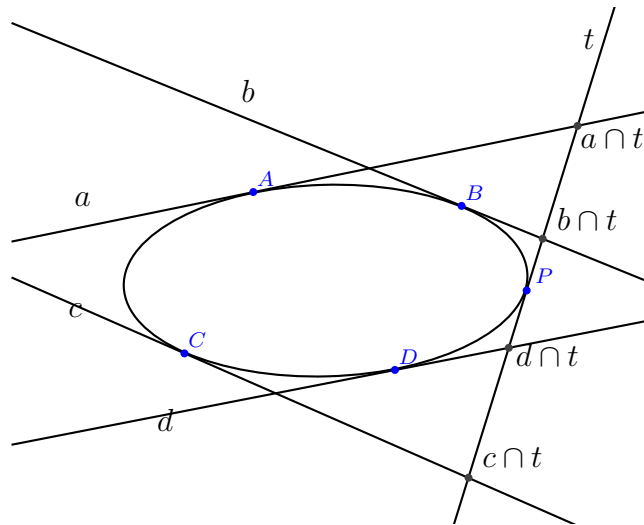


Fig. 3.26:

Seja P o ponto de tangência de t .

Como \mathbf{a} e \mathbf{t} são as polares de A e P , respetivamente, relativamente à cónica C , tem-se, pelo teorema de La Hire, que AP é a polar de $\mathbf{a} \cap \mathbf{t}$.

De modo análogo, BP , CP e DP são as polares de $\mathbf{b} \cap \mathbf{t}$, $\mathbf{c} \cap \mathbf{t}$ e $\mathbf{d} \cap \mathbf{t}$ relativamente a C .

Como a polaridade preserva a razão cruzada, obtemos que

$$(\mathbf{a} \cap \mathbf{t}, \mathbf{b} \cap \mathbf{t}, \mathbf{c} \cap \mathbf{t}, \mathbf{d} \cap \mathbf{t}) = (AP, BP, CP, DP)$$

e a última razão cruzada não depende do ponto P , pelo que, $(\mathbf{a} \cap \mathbf{t}, \mathbf{b} \cap \mathbf{t}, \mathbf{c} \cap \mathbf{t}, \mathbf{d} \cap \mathbf{t})$ não depende da tangente \mathbf{t} .

■

Exemplo:

Consideremos novamente a cónica projetiva E de equação

$$2x^2 + 3xy + 4y^2 + 2xz - 6yz + 2z^2 = 0$$

Sejam $A \equiv [0 : 1 : 2]$, $B \equiv [0 : 1 : 1]$, $C \equiv [-4 : 1 : 3]$ e $D \equiv [-1 : 2 : 1]$ pertencentes a esta cónica.

Seja ainda $T \equiv [-3 : 2 : 8]$ um outro ponto de E .

Determinemos as tangentes $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ e \mathbf{t} a E em A, B, C, D e T , respetivamente.

Tangente a E em A :

$$(0 \ 1 \ 2) \begin{pmatrix} 2 & 3/2 & 1 \\ 3/2 & 4 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 7x - 4y + 2z = 0$$

$$\mathbf{a} \equiv [7 : -4 : 2]$$

Tangente a E em B :

$$(0 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} 2 & 3/2 & 1 \\ 3/2 & 4 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 5x + 2y - 2z = 0$$

$$\mathbf{b} \equiv [5 : 2 : -2]$$

Tangente a E em C :

$$(-4 \ 1 \ 3) \begin{pmatrix} 2 & 3/2 & 1 \\ 3/2 & 4 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -7x - 22y - 2z = 0$$

$$\mathbf{c} \equiv [-7 : -22 : -2]$$

Tangente a E em D :

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3/2 & 1 \\ 3/2 & 4 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4x + 7y - 10z = 0$$

$$\mathbf{d} \equiv [4 : 7 : -10]$$

Tangente a E em T :

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3/2 & 1 \\ 3/2 & 4 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 10x - 41y + 14z = 0$$

$$\mathbf{t} \equiv [10 : -41 : 14]$$

Determinemos agora os pontos de interseção das retas $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ e \mathbf{d} com \mathbf{t} .

$\mathbf{a} \cap \mathbf{t}$:

$$\begin{cases} 7x - 4y + 2z = 0 \\ 10x - 41y + 14z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{19}z \\ y = \frac{6}{19}z \end{cases}$$

$$\mathbf{a} \cap \mathbf{t} \equiv \left[-\frac{2}{19}z : \frac{6}{19}z : z \right] = [-2 : 6 : 19]$$

$\mathbf{b} \cap \mathbf{t}$:

$$\begin{cases} 5x + 2y - 2z = 0 \\ 10x - 41y + 14z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{6}{25}z \\ y = \frac{2}{5}z \end{cases}$$

$$\mathbf{b} \cap \mathbf{t} \equiv \left[\frac{6}{25}z : \frac{2}{5}z : z \right] = [6 : 10 : 25]$$

$\mathbf{c} \cap \mathbf{t}$:

$$\begin{cases} -7x - 22y - 2z = 0 \\ 10x - 41y + 14z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{10}{13}z \\ y = \frac{2}{13}z \end{cases}$$

$$\mathbf{c} \cap \mathbf{t} \equiv \left[-\frac{10}{13}z : \frac{2}{13}z : z \right] = [-10 : 2 : 13]$$

$\mathbf{d} \cap \mathbf{t}$:

$$\begin{cases} 4x + 7y - 10z = 0 \\ 10x - 41y + 14z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3}z \\ y = \frac{2}{3}z \end{cases}$$

$$\mathbf{d} \cap \mathbf{t} \equiv \left[\frac{4}{3}z : \frac{2}{3}z : z \right] = [4 : 2 : 3]$$

Determinemos a razão cruzada destes quatro pontos $(\mathbf{a} \cap \mathbf{t}, \mathbf{b} \cap \mathbf{t}, \mathbf{c} \cap \mathbf{t}, \mathbf{d} \cap \mathbf{t})$

$$(-10, 2, 13) = \alpha(-2, 6, 19) + \beta(6, 10, 25) \Leftrightarrow \begin{cases} -2\alpha + 6\beta = -10 \\ 6\alpha + 10\beta = 2 \\ 19\alpha + 25\beta = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -1 \end{cases}$$

$$(4, 2, 3) = \gamma(-2, 6, 19) + \delta(6, 10, 25) \Leftrightarrow \begin{cases} -2\gamma + 6\delta = 4 \\ 6\gamma + 10\delta = 2 \\ 19\gamma + 25\delta = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = -\frac{1}{2} \\ \delta = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$(\mathbf{a} \cap \mathbf{t}, \mathbf{b} \cap \mathbf{t}, \mathbf{c} \cap \mathbf{t}, \mathbf{d} \cap \mathbf{t}) = \frac{-1}{2} / \frac{1/2}{-1/2} = \frac{1}{2}$$

Consideremos agora um outro ponto $P \equiv [-4 : 1 : 4]$ pertencente à cónica E e verifiquemos que $(\mathbf{a} \cap \mathbf{p}, \mathbf{b} \cap \mathbf{p}, \mathbf{c} \cap \mathbf{p}, \mathbf{d} \cap \mathbf{p}) = \frac{1}{2}$, sendo \mathbf{p} a reta tangente a E em P .

Tangente a E em P :

$$(-4 \quad 1 \quad 4) \begin{pmatrix} 2 & 3/2 & 1 \\ 3/2 & 4 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -5x - 28y + 2z = 0$$

$$\mathbf{p} \equiv [-5 : -28 : 2]$$

$\mathbf{a} \cap \mathbf{p}$:

$$\begin{cases} 7x - 4y + 2z = 0 \\ -5x - 28y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{9}z \\ y = \frac{1}{9}z \end{cases}$$

$$\mathbf{a} \cap \mathbf{p} \equiv \left[-\frac{2}{9}z : \frac{1}{9}z : z \right] = [-2 : 1 : 9]$$

$\mathbf{b} \cap \mathbf{p}$:

$$\begin{cases} 5x + 2y - 2z = 0 \\ -5x - 28y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{5}z \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{b} \cap \mathbf{p} \equiv \left[\frac{2}{5}z : 0 : z \right] = [2 : 0 : 5]$$

$\mathbf{c} \cap \mathbf{p}$:

$$\begin{cases} -7x - 22y - 2z = 0 \\ -5x - 28y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{50}{43}z \\ y = \frac{12}{43}z \end{cases}$$

$$\mathbf{c} \cap \mathbf{p} \equiv \left[-\frac{50}{43}z : \frac{12}{43}z : z \right] = [-50 : 12 : 43]$$

$\mathbf{d} \cap \mathbf{p}$:

$$\begin{cases} 4x + 7y - 10z = 0 \\ -5x - 28y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{38}{11}z \\ y = -\frac{6}{11}z \end{cases}$$

$$\mathbf{d} \cap \mathbf{p} \equiv \left[\frac{38}{11}z : -\frac{6}{11}z : z \right] = [38 : -6 : 11]$$

$$(-50, 12, 43) = \alpha(-2, 1, 9) + \beta(2, 0, 5) \Leftrightarrow \begin{cases} -2\alpha + 2\beta = -50 \\ \alpha = 12 \\ 9\alpha + 5\beta = 43 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 12 \\ \beta = -13 \end{cases}$$

$$(38, -6, 11) = \gamma(-2, 1, 9) + \delta(2, 0, 5) \Leftrightarrow \begin{cases} -2\gamma + 2\delta = 38 \\ \gamma = -6 \\ 9\gamma + 5\delta = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = -6 \\ \delta = 13 \end{cases}$$

$$(\mathbf{a} \cap \mathbf{p}, \mathbf{b} \cap \mathbf{p}, \mathbf{c} \cap \mathbf{p}, \mathbf{d} \cap \mathbf{p}) = \frac{-13}{22} / \frac{13}{-6} = \frac{1}{2}$$

Como pudemos observar , considerando outra tangente à cônica, obtivemos o mesmo valor para a razão cruzada dos pontos de interseção de $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ e \mathbf{d} com essa tangente.

Bibliografia

- [1] Adam, P. P., *Trigonometria plana y esférica. Nociones de geometria proyectiva y aplicaciones. Estudio de las cónicas.*, Biblioteca Matemática S. L., 1969
- [2] Alsin, C. & Trilhas, E., *Lecciones de Algebra y Geometria - Curso para estudiantes de Arquitectura*, Editorial Gustavo Gili, S.A., 1984
- [3] Audin, M., *Géométrie*, Editions Espaces 34, 1998
- [4] Auffinger, A. C. & Valentim, Fábio, *Introdução à Geometria Projetiva*, Universidade Federal do Espírito Santo, 2003
- [5] Ayres Jr., F., *Fundamentos de Matemáticas Universitárias. Geometria analítica plana e sólida*, Volume III, Editora McGraw-Hill do Brasil, 1974
- [6] Berger, M. & Nathan, E., *Géométrie*, Editions Nathan, 1990
- [7] Brannan, D. A. et al, *Geometry*, Cambridge University Press, 1999
- [8] Castillo, C. I., *Geometría*, <http://www.uv.es/ivorra/Libros/Geometria.pdf>, Acesso em Abril de 2011
- [9] Coxeter, H. S. M., *Projective Geometry*, Springer, 1987
- [10] Fernandez, L., *Notas de Geometria I. Licenciatura em Ensino de Matemática*, Universidade do Minho, 2007
- [11] Gordejuela, F. E., *Geometría Projectiva*, <http://www.cemat.org/cdc/EtayoGeoPro.pdf>, Acesso em Janeiro de 2011
- [12] Sidler, J. C., *Géométrie projective* - InterEditions, 1993
- [13] Steinbruch, A., *Geometria Analítica*, PEARSON, 1987
- [14] Villa, A. de la, *Problemas de Algebra*, CLAGSA, 1994

- [15] Wu, Shin -Ting, *Notas de aula-2º SEM*, FEEC, 2006